Mathem. U. 308 a — (1

Zur

Bibliotheck

der

Königl. Baierschen

Forstschule

Weihenstephan.

Aa 2

Die selbstlehrende

Rechenkunst

oder

vollständige Anweisung für alle Stände

insonderheit

für Kaufleute, Oeconomen und andere Geschäftsmänner, die in ihren Verrichtungen und Aemtern mit Rechnen zu thun haben

zu einem gründlichen und leichten Selbstunterrichte sowohl in der ihnen nöthigen Rechenkunst selbst als auch Rechnungsführung.

In zweyen Theilen verfasset

von

Friedrich August Boysen

Archidiaconus an der hohen Stifts- und Schloßkirche St. Servatii zu Quedlinburg.

T. 2 s. Qu K 00

Erster Theil

Bayer. Staatsministerium
f. Ernährung, Landwirtschaft u. Forsten
Ministerialforstabteilung
Bücherei
364

Leipzig

bey Johann Gottlob Feind. 1796.

Aa 2
1
Fd 167/2720

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorrede.

Daß es unter den vielen Anweisungen zur Rechenkunst mehrere in mancher Hinsicht gute und zweckmäßige giebt, ist eine Wahrheit, die ein jeder, der auf diesen Gegenstand seine Aufmerksamkeit gerichtet hat, wird zugeben müssen. Diese Erfahrung, welche mir keinesweges hat entgehen können, würde hinreichend gewesen seyn, mich von dem Versuche, dieses gegenwärtige Werkchen, welches eine Anweisung zur Rechenkunst für das gemeine Leben in etwas weiterem Verstande, und zwar zu einem Selbstunterrichte, seyn soll, herauszugeben; allein folgende Betrachtungen schienen mir einen hinreichenden Grund darzubiethen, diese gegenwärtige Arbeit mir zu erlauben. Unter die Schriften, welche eine Anweisung zum Rechnen ertheilen, gehören zuförderst diejenigen, welche die Arithmetik als einen Theil der mathematischen Wissenschaften fast blos in Hinsicht auf die übrigen vortragen, und hierbey die Anwendung der Arithmetischen Lehren auf das gemeine Leben und die Erweiterung derselben, für die besondern Fälle desselben, besonders wenn man das Wort gemeines Leben in weiterem Sinne nimmt, fast ganz über-

gehen, oder nur nebenbey berühren. Solche Lehrbücher, von denen wir gegenwärtig an dem Kästnerschen und andern, ganz unverbesserliche besitzen, enthalten die Gründe zu allem und jedem Verfahren bey einem jeden ordentlichen Rechnen, und legen sie dar; allein so lichthell sie auch sind, und so sehr sie auch die Grundwahrheiten der Wissenschaft in der vortrefflichsten Ordnung gedrängt darstellen, so sind sie doch für ungeübte Köpfe eine ungenießbare Speise, indem diese einen solchen gedrängten Unterricht nicht verstehen können, und unvermögend sind, die darinn liegenden Grundwahrheiten auf den Gebrauch im gemeinen Leben, ohne dazu besonders angewiesen zu werden, anzuwenden.

Es giebt nun außer diesen noch einen großen Vorrath arithmethischer Anweisungen, welche den eigentlichen Namen der Rechenbücher führen. Diese unterscheiden sich von jenen vorhin angeführten auf eine ungemein auffallende Art. Größtentheils lehren sie das Rechnen, oder eigentlich die Anwendung dieser Wissenschaft auf das gemeine Leben, auf eine sehr mechanische Art, oder nach bloßen, bald genau und ängstlich, bald weitläufig, und nicht selten unbestimmt ertheilten Regeln. Die Gründe des Verfahrens werden nicht angegeben, auch wird dasselbe gewöhnlich nicht einmahl erläutert. Alles wird durch Regeln und Exempel erzwungen. Die Ursach hiervon ist keine andre, als die, weil sehr oft unmathematische, aber im practischen Rechnen sonst geübte Männer, überzeugt davon, daß

sie

sie auf diese Art immer vielen Anfängern und Geübteren zu statten kommen würden, indem sie das Rechnen nur auf ähnliche Art selbst gelernt haben, als Lehrer in dieser Wissenschaft auftreten. Von dieser Art von arithmetischen Anweisungen, insonderheit denen, die auf das Rechnen beym Handel mit abzwecken, sind in den neuern Zeiten ganz vortreffliche und brauchbare Schriften erschienen. Ich verstehe hierunter solche, die sich auf viel specielle Fälle des Lebens, im Handel ꝛc. erstrecken, welche Mannigfaltigkeit, sobald ein Unterricht nicht durch wissenschaftliche Einrichtung begründet ist, äußerst nothwendig wird. Hiernächst begreife ich hierunter diejenigen Schriften, in welchen die Abkürzungen der ersten und natürlichen Art zu rechnen hinreichend gezeigt werden, und folglich das Geschwindrechnen gelehrt wird. Das ist aber gewiß: wer die Wissenschaft wissenschaftlich erlernt hat, muß bey manchen practischen Anweisungen, wenn sie auch sonst ihr Gutes besitzen, bald lächeln, bald diejenigen bedauren, die sich daraus eine gründliche Kenntniß verschaffen wollen, wenn er, sobald solche Schriftsteller Gründe angeben, beweisen, oder auch nur erklären wollen, die oft so dürftigen Erklärungen, einseitigen Vorstellungen, die so ungemein häufig unvollständige, oft fehlerhafte, Theorie, die unbestimmten Ausdrücke, das Weglassen solcher Lehrsätze, die schlechterdings nicht entbehrt werden können, das beständige Hinneigen zu dem Mechanischen, und überhaupt eine das Erlernen ungemein erschwerende Methode wahrnehmen muß, und statt einer instruirenden und überzeugenden

Anleitung zu der Wissenschaft am Ende fast nichts, als ein Exempelbuch in Händen hat, welches sich freylich auf eine große Menge, oft aber auch einander sehr ähnlicher Fälle ausdehnt. Die Folgen eines solchen Unterrichts sind leicht einzusehen. Hat derjenige, der die Wissenschaft so erlernt, nicht täglich darinnen Uebung, so geht sein Wissen bald verlohren, und er verwirrt sich in den ihm in Menge gegebenen Regeln, Ausnahmen und Bedingungen. Kommen Fälle vor, die in seinem Buche gar nicht, oder nur zum Theil, enthalten sind, so kann er sich nicht helfen, er muß rathen, wird zu Fehlern verleitet, und befindet sich mit einem Worte stets in der beengten Lage, worinnen ein jeder ist, der eine Wissenschaft nicht gründlich erlernt hat.

Indessen giebt es auch Anweisungen zur gemeinen Rechenkunst, welche mit der mathematischen Richtigkeit, und einer Art von mathematischer Darstellung der Wahrheiten, auch das Practische stark verbinden, und durch dieses letztere denen, die an das Abstracte nicht gewöhnt sind, verständlicher werden, indem sie durch jene Darstellung ihnen die Rechenkunst auch wissenschaftlich mittheilen. Unter die besten Bücher dieser Art zähle ich die **Rechenkunst von Lorenz Karsten**, wovon zu Bützow 1786. die zweyte Auflage erschienen ist, wiewohl außer einer, meinem Bedünken nach, in einigen Stücken statt findenden zu großen Kürze, der Umstand, daß die bey den Exempeln gebrauchte Währung, nach Marken, Groschen und Schillingen, nicht allen Lernenden bequem fallen dürfte.

Bey

Bey der gegenwärtigen Anweisung habe ich mein Augenmerk vor allen Dingen auf eine gute Methode gerichtet. Denn soll zu der gegenwärtigen Zeit ein solches Buch mit irgend einem Anstande erscheinen, so darf die Methode nicht fehlerhaft seyn. Ich glaube auch immer, daß die Verfertigung eines Lehrbuchs schon dadurch einige Rechtfertigung erhält, wenn der Verfasser, die Methode des Vortrags seiner Vorgänger zu verbessern, bemüht gewesen ist, ob er gleich die Wissenschaft selbst durch Zusätze nicht hat bereichern können. Daher habe ich die Lehren nach der strengsten Ordnung, und in der möglichsten Richtigkeit vorgetragen. Sie sind stets mit Bestimmtheit gegeben. Damit alles von dem Verstande der Lernenden wohl gefaßt werden mögte, so sind die Gründe des Verfahrens, wenn gleich nicht mit der mathematischen Strenge erwiesen, doch immer zur Ueberzeugung erläutert worden. Ich habe mich bemühet, in Ansehung der Anwendung dieser Lehren auf Fälle des Lebens so vollständig, als es nur seyn konnte, zu werden, und deswegen die besten practischen Lehrbücher zu benutzen gesucht. Hierbey habe ich auch die anwendbarsten Abkürzungen zum Behufe des Geschwindrechnens mitgetheilt, indem ich ihre Gründe entwickelt, und den Weg, sie weiter zu verfolgen, gezeigt habe. Die Weitläufigkeit ist vermieden worden, da ich überzeugt bin, daß die Menge der Exempel dem, der die Gründe nicht kennt, die Lehren selbst auf keine Weise begreiflicher macht, so wie für den, der mit denselben bekannt gemacht worden ist, einige wenige Beyspiele hinreichend sind.

Auf diese Art hoffe ich denenjenigen Personen, welche der Titel benennt, durch meine Schrift nicht unnütz geworden zu seyn, und schmeichle mir, daß sie, ihren Bedürfnissen gemäß, die Wissenschaft nicht allein erlernen, sondern auch werden in den Stand gesetzt werden, mit leichter Mühe nun andre weitläufige, ihnen sonst unverständliche, arithmetische Schriften verstehen zu können. Vielleicht finden selbst Lehrer der Rechenkunst hin und wieder Gedanken und Erläuterungen, auf welche sie, bey Mangel an Zeit, oder Hülfsmitteln, vielleicht nicht gleich von selbst gekommen wären, und die doch dem Unterrichte zu statten kommen können.

Die Lehre von den **Brüchen** finde ich in manchen guten Lehrbüchern nicht so ausführlich erklärt, als es seyn sollte. Da bey den meisten Rechnungen Brüche vorkommen, so entstehen auch in dieser Hinsicht ungemein viel und mannigfaltige Fälle und Fragen in Ansehung derselben, wo denn der nicht recht Geübte sich selbst von diesen Anweisungen zu seinem Verdrusse verlassen sehen muß. Ich habe daher bey dieser Lehre etwas weitläufig werden müssen. Auch bin ich das bey der **Regel de Tri**, und eben so bey der **Kettenrechnung** geworden. Die letztere fand ich fast überall blos mechanisch, und nicht selten verworren, unbestimmt, und folglich undeutlich gelehrt. Ich suchte daher bey allen diesen Stücken der Rechenkunst alles so viel, als möglich, richtig geordnet, bestimmt und deutlich darzustellen.

Der zweyte Theil dieser Rechenkunst wird, außer einer Abhandlung von den Decimalbrüchen, deren Kenntniß der Tabellen wegen, die man in manchen größern arithmethischen Werken findet, unentbehrlich ist, einen Unterricht über das Maaß, Geld, Vergleichung desselben unter einander; ferner Anweisung zu Zinsberechnungen, Geldreductionen, Handel und Wechselberechnungen, über Sterbe- und andere Cassen, und über die Rechnungsführung selbst ertheilen, und folglich nicht allein die Handelsrechnung begreifen, sondern sich auch auf die politische sowohl, als cameralistische, Rechnung ausdehnen, und hierbey nicht blos erklärend seyn, sondern auch denen, die sich weiter mit diesen Gegenständen beschäfftigen wollen, eine Anleitung zu den gegenwärtigen besten Hülfsmitteln in diesen Fächern ertheilen.

Wird diese Arbeit den Beyfall der Sachverständigen erhalten, so wird das mir die beste Belohnung für die viele Mühe und Geduld, die sie mir gekostet hat, gewähren.

Quedlinburg, den 15ten Februar 1796.

Friedrich August Boysen.

Inhalt.

Inhalt des ersten Theils.

Das erste Capitel. Einleitung. Seite 1

Das zweyte Capitel. Das Zählen (Numeriren). 3

Das dritte Capitel. Die vier Veränderungsarten der Zahlen, als Ausdrücke von Mengen ohne bestimmte Bedeutung (Vier Species in unbenannten Zahlen). = = = 13

Das vierte Capitel. Von den Brüchen in unbenannten Zahlen. = = = 41

Das fünfte Capitel. Die vier Species in benannten Zahlen. = = = 71

Das sechste Capitel. Brüche in benannten Zahlen. 87

Das siebente Capitel. Einige gangbare Arten von Abkürzungen bey den vier Speciebus. = 96

Zusätze zu den vier Speciebus. = 110

Das achte Capitel. Etwas über die Proben bey den vier Rechnungsarten. = = = 116

Das neunte Capitel. Von den Verhältnissen und Proportionen. = = = 131

Das zehnte Capitel. Die Regel de Tri. = 148

Das eilfte Capitel. Die Kettenrechnung. = 214

Das

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Das erste Capitel.

Einleitung.

1. So bald man sich mehrere einzelne Dinge einer Art, zusammen genommen, nach ihrer Menge, und zwar bestimmt, gedenkt, so gedenkt man sich auch eine Zahl solcher Dinge. Behandelt man solche Zahlen nach gewissen Absichten und Gesetzen, um daraus gewisse andre Zahlen zu finden, so rechnet man.

1. Ein Thalerstück giebt noch keine Zahl von Thalern: denn bey demselben sind noch keine mehrere zusammengenommen. Eine von zusammengelegten Thalerstücken aufgethürmte Walzen-ähnliche Säule von sechs Zoll Höhe giebt mir keinen Begriff von Zahl: denn ich denke mir hier blos die Thalerstücke nach einer körperlichen Masse Metall; aber keinesweges als eine bestimmte Menge einzelner Dinge. Ein aufgeschütteter Haufe von Thalerstücken ist auch noch keine Zahl: denn ich stelle mir dabey keine bestimmte Menge solcher Stücke vor. Eben so geben zehen Thalerstücke und zehen Groschenstücke keine Zahl von Thalern: denn es sind Dinge von verschiedener Art. Gedenke ich mir aber zehen Thalerstücke, so denke ich mir eine bestimmte Menge von Thalerstücken nach den sie ausmachenden einzelnen bestimmten einander ähnlichen zehen Thalerstücken: das ist eine wirkliche Zahl von Thalerstücken.

2. Es machen zwar drey Thaler und drey Groschen eine Zahl von sechs Stücken aus. Aber nun betrachtet man sie, weder als Thaler-, noch als Groschenstücke, sondern überhaupt als Stücken Geldes. Folglich enthalten diese sechs Stücke zwar eine Zahl; aber als Dinge, die nur im allgemeinen von einerley Art sind (als Geldstücken); keinesweges auf eine besondere (specielle) Art (als Thaler).

3. Sagt man im gemeinen Leben: es war eine große Zahl Menschen auf dem Markte ꝛc. so gebraucht man das Wort Zahl in einem weiten unbestimmten Begriffe, der in der Rechenkunst nicht statt findet, statt Menge.

4. Auf die Bemerkung (2.) kommt nicht wenig an! Wir werden nie beym Rechnen Dinge von ungleicher Art, (z. B. Rthlr. und ggl.) in eine Zahl zusammenbringen können, sondern sie, wenn sie zwar von allgemein gleicher, (als Rthlr. und ggl. als Geld) aber speciel ungleicher Art sind, durch Veränderung erst speciel gleich zu machen (z. B. die Rthlr. und ggl. in lauter ggl. zu verwandeln), suchen müssen, ehe damit wird gerechnet werden können. Thaler und Groschen, in so fern sie das bleiben, können nie zugleich in eine Zahl gebracht werden.

5. Sollte ich zu einigen Thalern noch einige hinzuthun, und ich beschäftigte mich, zu untersuchen, wieviel ich alsdann erhielte, so fände ich nach den Gesetzen der Zahlen eine gesuchte andre Zahl, und dann rechnete ich. Nähme ich von jenen Thalern einige hinweg, und suchte nun zu erfahren, wie viel ich übrig behielte, so rechnete ich wieder. Gleichfalls würde ich rechnen, wenn ich den Werth einiger Sächsischer Thaler mit dem Werthe einer Zahl von Brandenburgischen Thalern vergleichen, oder, falls mir von 1 ℔ Waare der Werth an Gelde bekannt wäre, den Werth eben dieser Waare von einem angegebenen andern Gewichte finden wollte. Wer nun bey solchen und ähnlichen Verrichtungen die gesuchten Zahlen

nach den vorhandenen Gesetzen findet, der rechnet richtig, und wer sie bald findet, der rechnet fertig. Das erstere ist jedem Rechner unentbehrlich; das letztere erspahrt ihm Zeit und Mühe.

6. Da demnach das Rechnen blos Zahlen zum Gegenstande hat, so hat derjenige vor allen Dingen sich eine Kenntniß der Zahlen, oder des Zählens, zu verschaffen, der es im Rechnen zu irgend einiger Gründlichkeit bringen will.

7. Im gemeinen Leben kommt keine Zahl vor, welche nicht eine Menge gewisser Dinge anzeigte, als: drey Pfund Kaffe; zehn Ellen Garn ꝛc.; es ist aber auch erlaubt, sich die Zahlen ganz ohne eine solche bestimmte Verbindung zu gedenken, und als Ausdrücke von Mengen anzusehen, bey welchen zwar jegliche Arten von Größen stehen könnten; aber jetzt nicht stehn. Solche Zahlen heißen unbenannte, so wie die erstern benannte genannt werden. Die unbenannten werden wir, weil wir durch keinen Nebenbegriff dabey gestört werden, in dem folgenden 2ten, 3ten und 4ten Capitel zuerst betrachten.

Das zweyte Capitel.

Das Zählen (Numeriren).

Eigentliches Zählen.

1. Die Zahl entsteht ordentlicher Weise, indem die vorhandene Größe, die man Eins nennt, immer um eine gleiche Größe (um Eins) vermehrt wird. So, wenn der Punct. Eins ist, erwächst .. Zwey, ... Drey, ... Vier, ... Fünf, ... Sechs, ... Sieben, ... Acht, ... Neun.

1. Es kam immer Ein Punct hinzu, und es entstand so die folgende größere Zahl.

2. Wenn zu Eins auf einmahl Zwey kommen, so entsteht die Zahl Drey. Dies ist aber die ordentliche Entstehung der Drey nicht, sondern eine außerordentliche. Im Grunde thut man indessen auch hierbey nichts anders, als daß man zu Eins noch Eins und Eins hinzufügt, ob es gleich der Kürze wegen nicht auf diese Art geschieht.

3. Ohne Eins läßt sich daher keine Zahl denken. Die Eins liegt bey einer jeden Zahl zum Grunde und ist der Maasstab der Zahl. Sage ich: zehen Thaler! so ist ein Thaler der Maasstab der zehen Thaler, der gleichsam zehnmahl übergeschlagen ist.

4. Die eben bemerkten Neun Zahlen werden wir stets Einer nennen.

5. Sind nun Neun vorhanden, und es kommt noch Ein Einer hinzu, so sind es Zehen.

6. Die Zehen ist, bey der fast überall angenommenen und an sich vortreflichen Art zu rechnen, eine wichtige Zahl. Denn sie giebt einen bequemen Ruhepunct ab, welcher dem Gedächtniß, das durch eine ohne Absatz fortgehende lange Reihe von Zahlen ungemein ermüdet werden würde, sehr zu statten kommt. Es werden nämlich Zehn Einer als Eins angesehen, und die folgenden Einer zu diesem Eins besonders hinzugesetzt und mit ihm zugleich ausgesprochen. Mehr als Zehn wird nie zusammengefaßt.

7. Machten wir einen frühern Ruhepunct, als die Zehn ist, so würden die Absätze durch eine gehäufte Menge dem Gedächtnisse wiederum lästig werden.

8. Eine solche Eins, welche zehen Einer in sich faßt, nennen wir künftig immer einen Zehner.

9. Wenn ihr einen Groschen Eins nennet, zehen derselben auf einen Tisch zählet, und sie zusammen auf einen Haufen schiebet, so könnet ihr den ganzen Haufen wieder Eins nennen; aber er ist nun ein Zehner von Groschen.

10. Es gilt nicht blos von den Einern, daß zehen derselben als **Eins**, nämlich als ein **Zehner**, angesehen werden, sondern in der ganzen Reihe möglicher Zahlen wird das unveränderliche Gesetz beobachtet, daß jedesmahl zehen Zahlen von einerley Art in Eine einzige von einer grössern Art zusammengefaßt werden. Dieser vortreflichen Einrichtung sind unsere Zahlzeichen ganz angepaßt. Man nennt sie das decadische Gesetz, von dem Griechischen δέκα, welches Zehn heißt.

11. Kommt zu Zehen noch **Eins** hinzu, so entsteht **Eilf** (dem Sprachgebrauch nach) statt Einzehn; noch Eins dazu giebt Zwölf; noch Eins Dreyzehn. So entsteht ferner Vierzehn, Funfzehn, Sechszehn, Siebzehn, Achtzehn, Neunzehn.

12. Eilf sind also Ein Zehner und Ein Einer; Zwölf sind Ein Zehner und Zwey Einer; Dreyzehn sind Ein Zehner und Drey Einer. Oder: Eilf sind Eins und Eins; aber eins von diesen beyden Eins ist ein Zehner, der andere ein **Einer**.

13. Sobald zu Neunzehn noch ein Einer hinzu kommt, so entsteht die Zahl Zwanzig.

14. Zwanzig sind Zehen und noch einmahl Zehen. Oder diese Zahl ist so viel als Zwey; allein diese Zwey sind Zehner.

15. Kommt zu Zwanzig ein Einer hinzu, so sind es Zwanzig und **Eins**, wofür der Sprachgebrauch **Ein** und zwanzig sagt.

16. Es sind also **Ein** und Zwanzig so viel als Zwey und Eins. Allein die Zwey sind Zehner und die **Eins** ist ein **Einer**.

17. Sind zu Zwanzig wieder Zehn gezählt, so hat man dreymahl Zehn gezählt, oder Dreyßig. Die Dreyßig sind so viel als Drey, welches aber Zehner sind.

18. Zehn zu Dreyßig geben Vierzig: das sind Vier Zehner; Zehn dazu geben Funfzig: das sind Fünf

Zehner; Zehen dazu geben Sechszig: das sind Sechs Zehner; Zehen dazu machen Siebzig: das sind Sieben Zehner; Zehen dazu machen Achtzig: das sind Acht Zehner; Zehen dazu machen Neunzig: das sind Neun Zehner.

19. Folglich sind Acht Zehner und Sechs Einer Sechs und Achtzig; Neun Zehner und Neun Einer Neun und Neunzig, u. s. w.

20. Kommen zu Neunzig noch Zehn hinzu, so hat man Zehn zehnmahl gezählt, und sollte nach den bishero gebrauchten Ausdrücken Zehnzig sagen, wofür aber, der Kürze wegen, Ein Hundert gesagt wird.

21. Ein Hundert macht also zehen Zehner aus. Da wir aber bey dem Zählen stets mit der Zehen einen neuen Absatz machen (6. 10.), so machen wir bey diesen zehn Zehnern abermahls einen Absatz, und sehen nun Hundert nicht als Zehn (nämlich Zehner), sondern als Eins an, aber als eine Eins, welche zehn Zehner in sich faßt.

22. Wenn ihr auf einen Tisch zehen Groschen in einen Haufen bringt, und zehn solcher Haufen auf den Tisch legt, so habt ihr zehen Zehner von Groschen. Schiebet ihr diese zehen Zehner zusammen, so ist das Ein Hunderter von Groschen.

23. Wenn zu diesem Hunderter noch ein Einer kommt, so haben wir Ein Hundert und Eins; kommen zu Ein Hundert Zehen hinzu, so sind es Ein Hundert und Zehen; noch Zehen, Ein Hundert und Zwanzig; noch Ein Einer, Ein Hundert Ein und Zwanzig.

24. Demnach sind Ein Hundert ein und zwanzig, Ein Hunderter, Zwey Zehner und Ein Einer.

25. Wenn man Zwanzig, oder Dreyßig u. s. w. und zugleich noch Einer hat, so pflegt man im gemeinen Leben zu sagen: es sind einige Zwanzig, oder Dreyßig. Nicht genau! Dies hieße Zwanzig, oder Dreyßig, einige-

mahl

mahl genommen. Man sollte sagen: „Zwanzig und Einige.“ Bey den Hunderten sagt man richtiger: „er hat Hundert und einige Thaler gewonnen;“ etwas ganz anders denkt man dabey: „er hat einige Hundert Thaler gewonnen.“

26. Nie darf man sagen, oder schreiben: Hundert Rthlr., man muß schreiben: Ein Hundert Rthlr.

27. Bey Zehen Hundert entsteht ein neuer Absatz, indem man Zehen Hundert, Eins nennt. Dieses ist ein Tausend. Oder zehen Hunderter geben einen Tausender.

28. Haben wir Ein Tausend zehenmahl gezählt, so entsteht ein neuer Absatz, und diese Zehentausend heißen wieder Eins; aber diese Eins ist ein Zehentausender.

29. Bey zehenmahl Zehntausend entsteht wieder ein neuer Absatz. Zehenmahl Zehntausend wird wieder Eins; dieses Eins ist ein Hunderttausender.

30. Zehen solche Hunderttausender bringen einen neuen Absatz hervor, und sie heißen wieder Eins; aber Ein tausendmahl Tausender.

31. Ein tausendmahl Tausend wird der Kürze wegen: eine Million genannt.

32. Wenige menschliche Angelegenheiten haben einen Bezug auf solche große Zahlen, als eine Million ist. Wir könnten daher, wenn wir blos auf gewöhnliche, oder uns im gemeinen Leben betreffende, Dinge sehen wollten, mit Erlernung des Numerirens hier Stillstand machen. Unsre Kenntniß im Rechnen bliebe aber hierbey zu eingeschränkt. Außerdem ist die Erlernung der Kenntniß höherer Zahlen mit eben so wenig Schwierigkeiten verbunden, als der niederen.

33. Zehen Millionen sind Zehenmahl tausendmahl tausend. Dies ist wieder ein neuer Absatz, in welchem die Eins ein Zehen Millioner, oder Ein zehenmahl tausendmahl tausender ist.

34. Zehen solche Zehen Millioner machen Einen Hundertmillioner, oder Ein hundertmahl tausendmahl Tausend aus.

35. Zehen Hundert Millioner machen bey einem neuen Absatze Einen Tausend Millioner aus, oder Zehenmahl hundert tausendmahl Tausend.

36. Zehen Tausend Millioner geben wieder einen neuen Absatz, und machen Einen zehentausend Millioner aus, oder Zehentausend tausendmahl tausend.

37. Zehen Zehentausend Millioner begreifen Einen Hunderttausend Millioner, oder hunderttausend tausendmahl tausend in sich.

38. Zehen Hunderttausend Millioner machen Einen tausendmahl tausend Millioner, oder ein Tausendmahl tausendmahl tausend tausendmahl tausend aus. Eine solche Zahl nennt man Eine Billion.

39. Daher entsteht eine Billion, wenn man eine Million Millionmahl nimmt.

40. Auf ähnliche Art zählt man zu noch größern Zahlen fort. Zehn Billionen, Hundert Billionen, Tausend Billionen, Zehntausend = Hunderttausend = Tausendmahl tausend Billionen. Dies letztere ist eine Trillion.

41. Sie ist also eine Billion eine Million mahl genommen.

42. Hätten wir tausend Säcke, in jedem tausend Thaler, so hätten wir eine Million Thaler. Würfen wir diese in einen Sack und hätten eine Million solcher Säcke, so hätten wir eine Billion Thaler. Schütteten wir diese Billion Thaler auf einen Haufen, und hätten eine Million solcher Haufen, so hätten wir eine Trillion Thaler.

43. Die Trillion enthält also tausendmahl tausend tausendmahl tausend tausendmahl tausend Einer in sich.

44. Billionen wirklicher Dinge kommen nicht vor; noch weniger Trillionen. Wir können daher hier stehen bleiben, ohne von Quadrillionen ꝛc. zu reden.

Das Lesen der Zahlen nach Zahlzeichen, oder Zifern, ingleichen das Schreiben derselben.

III. Weil man, wenn man Neun gezählt hat, jedesmahl mit der Zehen einen neuen Absatz macht, und wieder mit Eins anfängt, so hat man auch nur die Neun bekannten Zifern nöthig: 1 Eins, 2 Zwey, 3 Drey, 4 Vier, 5 Fünf, 6 Sechs, 7 Sieben, 8 Acht, 9 Neun, um damit alle möglichen Zahlen auszudrücken.

1. Stehen diese Zifern allein, so zeigen sie stets Einer an.

2. Wir sagen stets: denn beym Rechnen giebt es nicht die mindesten Ausnahmen in den vorhandenen Regeln.

3. Geht die Zahl über Neun, so muß die Stelle, worin eine Zifer in Ansehung der andern steht, ihren Werth bestimmen, indem man diese Zahlzeichen so neben einander in einer Reihe setzt, als man die Buchstaben beym Schreiben neben einander schreibet.

4. Es läßt sich aber keine Zahl in einer zertrennten Reihe niederschreiben (wie bey unsrer Buchstabenschrift üblich ist), sondern sie muß stets in einer einzigen Reihe enthalten seyn. Es ist aber eine Reihe von Zifern auch hinreichend, die größten Zahlen auszudrücken.

5. Die vorhin bemerkten und bey uns gewöhnlichen Zifern sind Morgenländischen Ursprungs, daher geht die Reihe derselben, welche eine Zahl ausdrückt, von der rechten nach der linken Hand fort (wie die Morgenländer schreiben). Denn daß wir die höheren Ziefern zuerst und dann die niedern schreiben und aussprechen, rührt daher, weil wir Abendländer von der linken nach der rechten Hand zu schreiben und zu lesen gewohnt sind. Da aber die äußerste Zifer rechter Hand in der Zahlenreihe die andern alle bestimmt, und diese ohne jene für nichts Gewisses gehalten werden können, so ist es außer allem Zweifel, daß

sie in der Zahlenreihe die erste sey, und das Schreiben der Zifern eigentlich von der Rechten nach der Linken geschehe. Ob nun gleich aus dieser Ursache die äußerste Zahl rechter Hand die erste, und die äußerste zur linken die letzte heißen müßte, so werden wir uns doch nach dem durch unsre Schreibart eingerißnen Sprachgebrauche richten, und stets die äußerste Zahl zur Linken die erste, oder forderste, nennen.

6. Wenn zwey Zifern neben einander stehen, so bezeichnet die in der zweyten Stelle (diese Stellen wollen wir in der Folge stets **Classen** nennen), d. i. die zur Linken, so viel Zehner, als sie sonst Einer anzeigt, wenn sie allein steht. Die ihr zur Rechten stehende, oder die in der ersten Classe, hat ihre natürliche Bedeutung, und drückt blos Einer aus. Also 11 ist **Ein Zehner** und **Ein Einer**, das ist (nach II. 12.) **Eilf.**

7. Ist blos ein Zehner da, und kein Einer dabey, so wird dem Zehner zur Rechten das Zeichen 0 (Null) gesetzt, welches anzeigt, daß die den Zehner ausdrückenfollende Zahl in der zweyten Classe stehe und kein Einer sey. So ist 10 Zehen, 20 Zwanzig, 80 Achtzig.

8. Die Zifern in der dritten Classe sind einfache Hunderter, als 300 Dreyhundert; die in der vierten einfache Tausender, 4000 Viertausend; die in der fünften Zehntausender, als 10000 Zehntausend; 50000 sind fünf Zehntausender, das ist, funfzigtausend. Die in der sechsten Classe sind Hundertmahltausender, als 600000 Sechshunderttausend, oder richtiger gesprochen, sechsmahlhunderttausend; die in der siebenten sind Tausendmahltausender, oder einfache Millioner, als 1000000, d. i. eine Million; 6000000 sechs Millionen.

9. Die Zifern in der achten Classe bezeichnen einfache **Zehner von Millionen**, als: 40000000 **Vier Zehner von Mill.**, das sind **Vierzig Millionen**; die in der Neunten einfache Hunderter von Millionen, als: 900000000, **Neun Hunderter von Millionen**, das sind Neun-

hundert

hundert Millionen. Die in der zehnten einfache Tausender von Millionen, 1000000000, d. i. Eintausend Millionen; die in der eilften einfache Zehntausender von Mill. so 50000000000, d. i. fünf Zehntausender von Mill., oder funfzigtausend Millionen; die in der zwölften einfache Hundertmahltausender von Millionen, als: 100000000000 einmahl Hundertmahltausend Millionen; die in der dreyzehnten einfache Tausendmahltausend Millioner, oder einfache Billioner, als: 3000000000000, drey Billionen.

10. Die Zifern in der vierzehnten Classe sind Zehner von Billionen, in der funfzehnten Hunderter von Bill., in der sechszehnten Tausender von Bill., in der siebzehnten Zehntausender von Bill., in der achtzehnten Hunderttausender von Billionen, in der neunzehnten Tausendmahltausender von Billionen, oder einfache Trillioner. So wären 8000000000000000000, Acht Trillionen.

11. Es gilt also eine Zifer in der folgenden Klasse stets zehnmahl so viel, als eben dieselbe in der vorhergehenden. Denn 10 ist zehnmahl soviel, als 1; 100 ist zehnmahl soviel, als 10: denn hundert entsteht erst dann, wenn 10 zehnmahl zusammengezählt ist. 1000 ist zehnmahl so viel, als 100. Eben so: 20 ist zehnmahl so viel, als 2. 40 zehnmahl so viel, als 4. 600 zehnmahl so viel, als 60. Will ich demnach eine Zahl ausdrücken, die zehnmahl so viel, als eine vorhandene ist, so darf ich nur hinter die vorhandene eine Null setzen, als 8 ist Acht; 80 Achtzig. Will ich eine mit einer, oder mehrern Nullen, sich endigende Zahl zehnmahl kleiner machen, als ich sie vor mir finde, so darf ich nur die Null der ersten Classe wegstreichen, als 20; die 0 hinweg, ist 2 zwey.

12. Es ist daher, wenn man Zahlen mit Zifern schreibt, welche einigermaßen von Wichtigkeit sind, keinesweges gut, vor, oder hinter denselben, einen Raum zu lassen, in welchen noch eine Zifer hineingeschrieben werden könnte. In Documenten gebraucht man daher

gar

gar keine Zifern, sondern schreibet die Zahlen stets mit Buchstaben; dies geschieht selbst sogar bey der Jahrzahl, indem alsdann eine solche Zahl nicht verfälscht werden kann. Z. B. „Empfangen, Sechshundert und dreyßig Reichsthaler, den zweyten May, des Jahrs Eintausend Sieben Hundert Fünf und Neunzig."

13. Nach dem bisher Gesagten wird sich nun eine jede Zahl lesen lassen: in der Zahl 28564 finden sich 2 Zehner von Tausend, das sind Zwanzigtausend; 8 einfache Tausender, das sind 8 tausend; 5 Hunderter, das sind 5 Hundert; 6 Zehner, das sind Sechzig und 4 Einer, folglich heißt die ganze Zahl: Acht und zwanzigtausend, fünfhundert, sechszig und vier (oder dem Sprachgebrauch nach: vier und sechszig).

14. Sähe die Zahl so aus: 20564, so wäre kein einfacher Tausender vorhanden, sondern Zwanzigtausend fünfhundert und vier und sechszig.

15. Man hört es bald, wenn man eine Zahl aussprechen hört (dafern man die Folge der Zahlen nach dem dekadischen Gesetze genau kennt), ob in irgend einer, oder mehrern Classen, eine Zahl fehle, und man also, bey dem Schreiben, an die Stelle der wegfallenden Zifer eine Null setzen müsse. Z. B. Es spricht jemand die Zahl Sechs Millionen funfzig tausend fünf und vierzig aus, so höre ich gleich, daß erstlich keine Hunderttausender, zweytens keine einfachen Tausender und drittens keine Hunderter in derselben befindlich sind, daß ich also an deren Stelle Nullen zu setzen und so zu schreiben habe: 6050045.

16. Weil man bey größern Zahlen in der Uebersicht fehlen kann, so ist es erlaubt, selbige abzutheilen. Man fängt nun bey dieser Abtheilung von der Classe der Einer an, und kann nach jeglichen drey Zifern etwa ein Comma setzen. Alsdann ist die Zifer nach dem ersten Comma ein einfacher Tausender; nach dem zweyten Comma ein Millioner; nach dem dritten Comma ein Tausender von Millionen, u. s. w. als 5,324,682,178.

Oder wollen wir die Millioner mit einem Punct bezeichnen, die Billioner mit zweyen, u. s. w.? als: 9685,432890,245; das ist willkürlich, und außerdem kommen solche Zahlen im gemeinen Leben nicht vor.

Das dritte Capitel.

Die vier Veränderungsarten der Zahlen, als Ausdrücke von Mengen ohne bestimmte Bedeutung (Vier Species in unbenannten Zahlen).

I. Die Zahlen können nur auf zweyerley Art verändert werden. Sie werden **vermehrt**, oder **vermindert**. 4 und 1 machen 5. d. i. Vermehrung der 4. Oder: 4 weniger 1 macht 3. d. i. Verminderung der 4.

1. Man könnte sagen, 4 wird verändert, wenn es in 3 und 1 zerlegt wird; allein es behält 3 und 1 denselben **Werth**, den 4 hatte, folglich wird 4 nicht verändert, und es giebt also nur zwey Veränderungsarten der Zahlen.

2. **Ordentlich** wachsen die Zahlen durch stetes Hinzukommen der 1, als eines Einers. (2 Cap. I. 2.) Dieses Vergrößern vorzunehmen, lernt man durch das Zählen (**Numeriren**). **Außerordentlich**, wenn zu einer Zahl eine andre schon vorhandene hinzukommt (daselbst). Dies versteht man eigentlich unter dem **Addiren**, und um es gründlich und leicht vermittelst der Zifern bewerkstelligen zu können, werden einige Regeln erfordert.

Die Addition.

II. Werden zu einer Zahl mehrere, oder auch nur eine, hinzugesetzt, so erwächst eine neue Zahl, größer als jede derjenigen, die man zusammensetzt (**Posten**), und

und gleich den zusammengenommenen Posten. Diese ist die Summe der Posten, oder das *Aggregat*, oder *Facit*.

1. Das Zeichen + drückt die Addition aus. 1 + 4 ist gleich 5, d. i. 4 zu 1 addirt, geben zur Summe 5.

2. Man hat in der Mathematik verschiedene Zeichen eingeführt, wodurch man gewisse Worte erspahrt. So heißt also + so viel als addirt; = heißt so viel als: ist gleich. Daher heißt 1 + 4 = 5, so viel, als, 4 addirt zu 1 ist gleich (oder macht) 5. Wir können auch bey der gemeinen Arithmetik einige solcher Zeichen, der Kürze wegen, gebrauchen.

3. Man addirt, indem man einen Posten zu dem andern hinzuzählt. Z. B. 5 + 4 sind 9. das ist: Fünf Einer, dazu vier Einer gezählt, sind 9 Einer. 12 + 6 = 18. 9 + 6 = 15.

4. Die Additionen durch Zehner sind vorzüglich leicht, 4 + 10 sind 14; es werden blos die 4 Einer in die Stelle der 0 gesetzt. So 15 und 10 sind 25, das ist zwey Zehner und fünf; die 5 bleibt, und aus 10 + 10 wird 20, d. i. fünf und zwanzig. 25 + 10 sind 35, d. i. drey Zehner und fünf, oder fünf und dreyßig.

5. Das Wort Summe gebraucht man im gemeinen Leben auch in einem weitläufigern Sinne, statt Menge. Z. B. „Er hat eine große Summe Geldes weggeschickt," ohne damit eine aus Posten entstandene Summe gerade bezeichnen zu wollen.

III. Zu dem Addiren mehrerer Posten und solcher, die aus größern Zahlen bestehen, wird eine ordentliche Operation erfordert. Merket dabey folgendes:

Erstlich. Stellet die Posten unter einander, und zwar genau so, daß alle Zifern von einer Art unter einander zu stehen kommen, als Einer unter Einer, Zehner unter Zehner ꝛc. und ziehet darunter einen Queerstrich.

Zweys

Zweytens. Zählet erstlich die Einer zusammen, und diese specielle Summe der Einer setzt unter den Strich, unter die Einer. Fahret hierauf auf gleiche Art mit den Zehnern und ferner mit den übrigen fort; so entsteht zuletzt unter dem Striche die ganze Summe.

Es ist zu addiren 1324,1212,431, schreibet:

1324
1212
431

Summe 2967

1. 4, 2, 1 Einer, sind in Summa 7 Einer, 7 untern Strich, unter die Einer; 2, 1, 3 Zehner, Summe 6 Zehner, unter die Zehner; 3, 2, 4 Hunderter, Summe 9 Hunderter, unter die Hunderter; 1 und 1 Tausender, Summe 2 Tausender, unter die Tausender.

2. Wir erhielten so die ganze Summe, als 2 Tausender, 9 Hunderter, 6 Zehner, 7 Einer, das ist 2967.

3. Hätten wir gesetzt und gerechnet:

1324
1212
431

Summe 2967, so hätten wir die Summe richtig erhalten; aber falsch geschrieben. Hieraus entstehn leicht Fehler, und es ist verdrießlich, solche Exempel nachzurechnen.

4. Es ward auch richtig gerechnet, wenn wir bey den Tausenden anfiengen, dann die Hunderter, dann die Zehner, und zuletzt die Einer zusammen zählten. Die Summe ward dieselbe. Doch ist das nur selten bequem.

IV. Es erwachsen häufig durch das Addiren der Einer ein, oder mehrere Zehner. Diese können in der Summe nicht zu den Einern gebracht werden, sondern sind zu den Zehnern zu zählen. Eben so aus den Posten der Zehner entstehen oft Hunderter, diese bringt man zu den Posten der Hunderter u. s. w.

Addirt: 296
636
Summe 932

1) 12 Einer sind 1 Zehner und 2 Einer, darum setzet die 2 Einer allein in die Summe als Einer, und zählet den einen Zehner zu den folgenden Zehnern. Dieser 1 Zehner und 9 und 3 Zehner sind 13 Zehner, oder 1 Hunderter und 3 Zehner; darum setzet nur die drey Zehner in die Summe der Zehner, den 1 Hunderter zählet zu den folgenden Hunderten. Dieser 1 Hunderter, 6 und 2 Hunderter geben 9 Hunderter.

2. Da bey dem Niederschreiben der Zahlen nach dem decadischen Gesetze gleich die Zahlen durch ihre Stelle nach ihrem Werthe als Zehner, Hunderter ꝛc. angedeutet werden, so darf man z. B. wie vorhin bey den 12 Einern, nicht erst ausrechnen, wie viel darinnen Einer und Zehner stecken, sondern die Stelle der 1 zur Linken der 2 sagt es von selbst, daß sie ein Zehner und die 2 Einer sind. Deswegen behalte ich bey einer solchen Zahl blos die **zur Rechten** bey, und bringe sie in die Summe. Die, welche vor ihr, (**vor** heißt **zur Linken**) steht, merke ich gleich entweder im Gedächtniß an (das heißt: **man nimmt sie in den Sinn**), oder schreibt sie auf die Seite hin, und addirt sie stets hernach zu der folgenden Classe. Vorhin gaben 9, 3, 1 Zehner, 13 Zehner, folglich 1 als 1 Hunderter (denn seine Stelle vor der 3 sagt das gleich) in den Sinn genommen, und hernach zu den Hunderten addirt. Die 3 sind Zehner.

3. Es kann auf diese Art kommen, daß in der Summe eine Zifer von einer Classe erwächst, die in den Posten nicht besetzt war. Z. B. in dem Exempel: 98
64
Summe 162, entstand aus den 9 und 6 Zehnern, 1 Hunderter; dieser muß nun vor der 6 zu stehen kommen. In den Posten war kein Hunderter.

4. Es

4. Es kann aus der Addition in einer Classe eine Zahl erwachsen, welche erst in die auf die nächste folgende gehört; z. B. es können aus vielen addirten Einern, ein, auch mehrere, Hunderter entstehn. Z. B. wir hätten in einem Exempel zwölfmahl die Zahl 9 zu addiren, das gäbe 108. Hier würden wir sagen 10 in den Sinn: denn die 8 Einer können nur in die Summe als Einer kommen. Die 10 in dem Sinne sind 10 Zehner, das ist, 1 Hunderter und weiter kein Zehner. Die Null in den 108 würde uns es auch gleich sagen, daß hier kein Zehner wäre, und die 1, daß noch zu den Hunderten 1 Hunderter kommen müßte. Wären es 128 gewesen, so hieß es 12 in den Sinn, nämlich 2 Zehner und 1 Hunderter.

5. Stehn in einer Classe lauter Nullen über einander, so kommt auch in die Summe dieser Classe 0.

Als: 630
320

Summe 950: denn hier sind in den Posten keine Einer, folglich können auch keine in die Summe kommen. Wollte ich in der Summe die 0 weglassen, so wäre 95 um 10 mahl zu wenig, weil ich Hunderter und Zehner in den Posten gehabt habe.

6. Dagegen kann auch in die Summe in einer Classe eine 0 kommen, wenn gleich die zur Stelle gehörenden Posten keine Null haben. Z. B. 456
34

Summe 490, wenn nämlich, wie hier, die addirten Posten gerade nicht mehr und nicht weniger (keinen Ueberschuß), als eine, oder mehrere Zahlen einer höhern Classe geben. Denn 6 und 4 Einer geben nicht mehr, als einen Zehner. So würden

4894
5106

Summe 10000 geben.

Das Subtrahiren.

V. Eine Zahl wird ordentlich vermindert, indem man einen Einer nach dem andern von ihr wegnimmt, welches ein jeder verrichten kann, der das Zählen versteht. Außerordentlich wird sie vermindert, wenn eine schon vorhandene andre Zahl von ihr auf einmahl weggenommen wird. Dies wird eigentlich unter der Subtraction verstanden, und will man es vermittelst der Zifern gründlich und leicht verrichten können, so wird dazu die Anwendung einiger Regeln erfordert.

VI. Wird von einer Zahl eine andre weggenommen, so heißt die erste der Minuendus, die letztere der Subtrahendus. So wie der Minuendus nach geschehener Wegnehmung des Subtrahendus erscheint, heißt er der Rest, oder die Differenz, weil diese Zahl der Unterschied zwischen dem Minuendus und Subtrahendus ist. Das Zeichen der Subtraction ist —.

VII. Man subtrahirt, indem man den Subtrahendus von dem Minuendus wegnimmt, und nun Acht giebt, was übrig bleibt. 4 von 6 weggenommen läßt zum Rest 2, das ist 6 — 4 = 2 (oder 6 weniger 4 macht 2).

VIII. Bey größern Zahlen setzt den Subtrahendus unter den Minuendus, und zwar in so fern wie bey der Addition, daß Einer unter Einer, Zehner unter Zehner u. s. w. zu stehen kommen, und ziehet darunter einen Queerstrich. Nehmet dann erstlich die Einer von den Einern weg, und setzt den Rest unter den Strich, unter die Einer; dann die Zehner von den Zehnern und verfahret mit dem Reste gleichfalls so; eben so bey den übrigen Classen.

286 Minuendus
152 Subtrahendus
134 Rest, oder die Differenz.

2 Einer

2 Einer von 6 Einern lassen Rest 4 Einer; 5 Zehner von 8, Rest 3 Zehner; 1 Hunderter von 2, Rest 1 Hunderter.

1. Wäre der Subtrahendus noch um 134 größer, als er ist, so wäre er dem Minuendus gleich, daher ist der Rest die Differenz.

2. Der Minuendus muß stets größer seyn, als der Subtrahendus ist, wenn ein eigentlicher Rest entstehen soll. Von 4 kann ich nicht 8 wegnehmen, und einen Rest erhalten. Wer 4 Rthlr. hat, kann davon 5 Rthlr. nicht wegnehmen; geschweige noch etwas übrig haben.

3. Ist der Minuendus dem Subtrahendus gleich, so entsteht kein Rest, sondern der Rest ist **Null**. Stehet also in einer Classe im Minuendo und Subtrahendo einerley Zahl, so kommt unter den Strich 0.

4. Wird von einer Zahl in Minuendo nichts weggenommen, das heißt: es hat die dazu gehörende Classe in Subtrahendo 0, so kann kein Rest entstehn, sondern die ganze Zahl kommt unter den Strich.

Als: 263
102
161, 2 von 3, Rest 1; 0 von 6, bleibt 6; 1 von 2, Rest 1.

5. Steht im Minuendus und Subtrahendus eine 0, so kommt unter den Strich auch 0: denn ein Nichts, das nicht verändert wird, bleibt Nichts. Als: 409
3 von 9 Rest 6; 0 von 0 läßt 0; 2 von 4 läßt 2. 203
Rest 206

6. Ist eine Zahl im Minuendus kleiner, als die in der ihr zugehörenden Classe im Subtrahendus, so kann doch eine Subtraction angebracht werden, vermittelst eines nur um ein weniges umständlichern Verfahrens, welches man, wiewohl nicht mit dem angemessensten Ausdrucke Borgen nennt, jedoch muß der Minuendus im Ganzen größer, als der Subtrahendus, seyn. So kann

immer einer im gemeinen Leben 18 einzelne Groschen ausgeben, ob er gleich nur 1 Thalerstück hat, sobald er dieses gegen 24 ggr. verwechselt; und er behält noch einen Rest.

7. Es wird nämlich zu der zu kleinen Zahl des Minuendus von der folgenden Zahl (das heißt in der höhern Classe) eine Einheit addirt, welche in der niedern Classe 10 gelten muß (2. Cap. III, 11.) und dann der Abzug vorgenommen. Die Zahl, von der geborgt ward, wird dadurch um eine Einheit ihrer Art weniger. Als:

644
391
---
253. 9 von 4 geht nicht. Es wird von der 6 eine Einheit genommen (oder gleichsam verwechselt), welche als ein Hunderter, 10 Zehner in sich faßt, und folglich, sobald er zu den Zehnern addirt wird, 10 gelten muß (7.); dazu die vorhandenen 4 Zehner addirt, macht 14 Zehner. 9 von 14 läßt 5. Nun sind die 6 Hunderter noch 5; 3 von 5, Rest 2.

8. Weil stets 10 geborgt werden, so giebt die vorhandene Zahl gleich die Summe, indem man sich die 1 davor denkt, ohne weiteres Nachrechnen, 4+10; ist 14. (3. Cap. II, 4.)

9. Muß die Zahl, von der geborgt ist, wieder borgen, so erhält sie zwar 10; sie hat aber Eins verloren:

334
189
---
145 hier 8 von 12, nicht von 13.

10. Wenn im Minuendus 0 steht, so wird diese durch das Borgen 10: denn da hier zu der geborgten 10 nichts hinzu kommt, so bleibt sie 10. 680

248

432

11. Ist die Zahl, von der man borgt, 1, so wird sie durch das Borgen zur 0, und soll von dieser Classe hernach

nach noch subtrahirt werden, so muß sie selbst borgen. Es ist dann eben das, als stünde statt der Eins, o. (10).

Als: 412
276
136 Rest. 7 von 10 Rest 3.

12. Ist es aber eine o, von welcher man borgen müßte, so muß man über sie weg zur nächsten Zahl gehen, und da borgen. Eine Null, von der schon geborgt ist, wird 9: denn sie hat von den 10 Einheiten, die sie erborgte, 1 Einheit bereits abgegeben. Folglich 4000
2346
1654

Hier borgt Null von Null; die letzte borgt von den 4 Tausenden. Darum geht 1 Tausender in die Classe der Hunderter; ein Hunderter in die Classe der Zehner; ein Zehner in die Classe der Einer. Darum hieß es: 6 Einer von 10 Einern, Rest 4; 4 Zehner von 9 Zehnern, Rest 5; 3 Hunderter von 9 Hunderten, Rest 6; 2 Tausender von 3 Tausenden, Rest 1.

13. Ist also unter einer Null des Minuendus, von welcher geborgt ist, eine Null im Subtrahendus, so kommt in den Rest 9: denn die 9 war 9 und blieb 9

5003
2904
2099. Ist eine 9 darunter befindlich, so kommt in den Rest o: denn 9 von 9 = o. Auf diese Art muß der Satz Nr. 5. eingeschränkt werden.

14. Besteht der Minuendus aus mehrern Zifern, als der Subtrahendus, so werden die übrigen, dafern nichts davon geborgt ist, unverändert in den Rest geschrieben:

23540
283
23357. Hier wird von 3 und 2 nichts abgezogen, sondern beyde kommen unverändert in den Rest.

15. Es kann aber auch die vorderste Zahl des Minuendus durch das Borgen ganz aufgerieben werden:

143
55
88

16. Je mehr sich der Subtrahendus dem Minuendus nähert, desto kleiner wird der Rest: 4321
4319
2 Rest. Hier

setzt man keine Nullen vor die 2, weil die Null doch nichts anders, als den leeren Raum anzeigt, welches vor einer Zahl (d. i. ihr zur Linken) unnütz ist.

17. Sind beyde gleich, so entsteht kein Rest; man drückt aber den Mangel des Restes durch eine, oder mehrere Nullen aus, welche anzeigen, daß hier subtrahirt worden sey, als:

4321		4321	
4321	oder	4321	
0000		0	

18. Das Exempel: 461
273
188 wäre richtig gerechnet; aber falsch geschrieben (3. Cap. VIII.).

IX. Weil beym Addiren die Summe gleich ist den zusammengenommenen Posten, so muß, wenn bey zweyen Posten einer derselben von der Summe abgezogen wird, der andere übrig bleiben, als:
246 + 368 = 614. Wenn wir nun einen Posten,
als: 246 von der Summe abziehn, so
bleibt 368 als der andre Posten übrig.
Sind mehrere Posten da, so ist, nachdem ein beliebiger derselben von der Summe abgezogen worden ist, der Rest der Summe der noch übrigen Posten gleich,
als:

als: 423
586
394

Summe 1403. Dafern hiervon
394 abgezogen wird, bleibt

Rest 1009, welcher der Summe der beyden Posten 423+586 gleich ist. Wird nun von dieser Summe abermals ein Posten, hier etwa 586 abgezogen, so bleibt der dritte 423 übrig. Wäre bey dem Addiren gefehlt worden, so würde sich durch dieses Verfahren der Fehler gleich entdecken, indem in dem ersten Falle die Zahl 368, und in dem letztern der Posten 423 nicht über geblieben seyn, sondern sich mehr, oder weniger, ergeben haben würde. Man nennt daher ein solches Verfahren die **Probe der Addition** (Von andern Arten dieser Proben im 8. Capitel).

Hat man subtrahirt, so erfährt man die Richtigkeit seines Verfahrens, indem man den Rest zu dem Subtrahendus addirt, die Summe muß dem Minuendus gleich seyn, weil der Rest die Differenz zwischen dem Minuendo und Subtrahendo ist (VIII.).

Als: 246.
122

Rest 124 dazu addirt,
122 so ist die

Summe 246 gleich dem Minuendo, und also richtig gerechnet worden; oder: 40010
20989

Rest 19021
20989 Probe

40010

So lange bey der Probe der Minuendus nicht herauskommt; so ist auch fehlerhaft gerechnet. (Mehr von Proben der Subtraction unten).

Abgekürzte Addition, oder Multiplication.

X. Wenn eine und eben dieselbe Zahl mehreremahl zu sich selbst addirt werden sollte, z. B. 331023 sollte 3 mahl zu sich addirt werden, so gäbe das schon einige Umstände, weil ich denn 331023 dreymahl hinschreiben, und hernach die Posten ordentlich addiren müßte; sollte diese Zahl aber Hundert, oder mehrere mahle zu sich selbst addirt werden, so müßte ich sie auch hundert, und mehrere mahle, unter sich setzen, welches eine Zeit und Papier kostende Arbeit wäre. Für solche oft eintretende Fälle ist daher eine abkürzende Addition eingeführt, das ist die sogenannte Multiplication (Vervielfältigung einer und eben derselben Zahl).

1. Das Zeichen der Multiplication ist ×. Daher 2 × 3 ist so viel als 2 dreymahl genommen, oder 2 mit 3 multiplicirt, oder 2+2+2.

XI. Man nimmt zu diesem Ende die zu vervielfältigende Zahl (Multiplicandus) nach ihren Einern, Zehnern u. s. w. so oft, als die ganze Zahl zu sich selbst addirt werden soll, oder so vielmahl, als die andre Zahl (der Multiplicator) die 1 in sich hat. Als 236 soll mit 5 multiplicirt werden, so nehmet erstlich die 6 Einer 5 mahl; dann die 3 Zehner 5 mahl, zuletzt die 2 Hunderter 5 mahl. Die jedesmahl erhaltene Zahl, welche ein specielles Product ist, schreibet, wie die Summe bey der Addition, unter den Strich, woraus sich denn zuletzt unter demselben das ganze Product ergiebt.

1. Der Multiplicandus und Multiplicator heißen auch überhaupt Factoren.

2. Jede Zahl an sich ist schon einmahl genommen, oder mit 1 multiplicirt, daher sagt man: 1 multiplicirt nicht.

3. Die speciellen Producte von 2 bis 9 rechnet man nicht erst besonders durch die Addition aus, daß man z. B. in dem vorigen Exempel bey 6 Einern, 5 mahl ge-

6
6
6
6
6
6

nommen, erst 6 rechnete, sondern man lernt die

30

Producte der 1 bis 9 durch 1 bis 9 völlig mit einer untrüglichen Fertigkeit auswendig. Dies geschieht durch Hülfe des Pythagorischen Täfelchens, oder Einmahl Eins, wie es hier folgt:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Um ein Product einer einfachen Zahl zu finden, z. B. 5 mahl 7, so gehet von der 5 in der obersten Reihe hinunter bis in die Reihe, vor welcher 7 zur Seite steht, so findet ihr 35 u. s. w.

4. Soll eine Zahl 10 mahl genommen, oder mit 10 multiplicirt werden, so setzet blos die 0 hinter sie: denn dadurch wird sie 10 mahl mehr. (Cap. 2. III, 11.).

5. Das folgende Exempel wird so berechnet: 237 × 6

237 Multiplicandus
6 Multiplicator } Factoren.

1422 Product.

7 Einer 6 mahl sind 42 Einer, d. i. 2 Einer und 4 Zehner, die 4 Zehner, wie bey der Addition, in den Sinn. 3 Zehner 6 mahl, sind 18 Zehner, dazu 4 aus dem Sinne, sind 22 Zehner, d. i. 2 Zehner und 2 Hunderter, diese in den Sinn. 2 Hunderter, 6 mahl genommen, sind 12 Hunderter, dazu 2 aus dem Sinne, sind 14 Hunderter.

6. Es ist in Ansehung der Richtigkeit der Rechnung einerley, welche von beyden Zahlen ihr für den Multiplicandus, oder Multiplicator ansehen wollet; das Product wird dasselbige: denn, wenn ich Jemanden 3 Thaler 2 mahl gebe, so hat er 6 Thaler, welches eben das ist, als wenn ich ihm 2 Thaler dreymahl gebe. Indessen ist es bequemer, und daher gewöhnlich, die größre Zahl als den Multiplicandus oben zu setzen. Ungewöhnlich würde es aussehen 6

237

1422 ob es gleich richtig gerechnet wäre.

7. Es ist aus eben dem Grunde, wenn mehr als zwey Zahlen mit einander multiplicirt werden, gleichfalls einerley, welche Zahl und welches Product der Multiplicandus werde. Z. B. 2 × 3 × 5 ist 30. Denn

3 3 2
2 oder 5 oder 5

6 × 5 = 30; 15 × 2 = 30; 10 × 3 = 30.

8. Ist in einer Classe des Multiplicandus eine 0, so kommt in das Product gleichfalls 0: denn Nichts mag ich so oft nehmen, als ich will, so entsteht stets Nichts: als: 20

6

120 Hier ist kein Einer, folglich kann auch kein

Einer

Einer durch die Multiplication entstehn; indessen muß die Null untern Strich, wegen der darauf folgenden Zehner.

9. Ist aber bey der vorhergehenden Classe etwas in den Sinn genommen gewesen, so kommt dieses alsdann allein ins Product für die folgende Classe, und wird also zu der Null gleichsam addirt. Als: 206

4

Prod. 824: denn 6 viermahl ist 24, 2 in den Sinn; 4 mahl 0 ist Nichts, 2 aus dem Sinne in das Product, ist 2 ꝛc.

10. So kann auch in dem Producte eine 0 entstehen, ohne, daß in der dazu gehörenden Classe des Multiplicandus eine 0 befindlich ist, theils, wenn kein Ueberschuß bleibt, theils durch das, was in den Sinn genommen gewesen ist, als in dem ersten Falle 35

4

Prod. 140

und in dem andern Falle 76

4

Prod. 304

11. Enthält der Multiplicator zwey Zahlen, z. B. es soll 432 mit 42 multiplicirt werden, so soll 432 erstlich 2 mahl genommen, und dann noch 40 mahl genommen werden. Daher schreibet zuförderst den Multiplicator unter den Multiplicandus, dann multiplicirt den letztern erstlich mit den Einern und darauf mit den Zehnern des Multiplicators; schreibet beyde Producte gehörig unter einander und addirt sie zuletzt, so ist ihre Summe das ganze Product.

432
42

864
1728

18144 Product.

Gehö-

Gehörig, heißt, daß, wenn der Anfang der Multiplication mit den 4 Zehnern gemacht wird, das erste Product, als hier die 8 (2 mahl 4 ist 8) in die Classe der Zehner (unter die 6 der erstern Reihe) gesetzt wird. Denn es ist hier 2, 4 mahl 10, oder 40 mahl genommen, folglich wird sie wirklich 80 und es müßte demnach hinter die erhaltene 8 eine 0 gesetzt, oder 80 in dem Producte geschrieben werden. Weil ich nun beym Multipliciren die 4, der Kürze wegen, lieber nur als 4 Einer ansehe, und sage 2 mahl 4 ist 8, so muß die 8 doch in die Classe der Zehner, damit sie ihren rechten Werth durch den Ort erhalte.

12. Hieraus folgt, daß, so oft ein Product einer neuen Classe des Multiplicators niedergeschrieben wird, man dessen erste Zahl um eine darüberstehende Zifer hineinrücke. Es müssen die folgenden Zahlen sich alle hiernach genau richten: denn sonst wird ein solches Exempel fehlerhaft.

13. Die beyden Producte mußten zusammen addirt werden, um das ganze Product zu erfahren: es gab nämlich das obere Product an, wie viel 432, 2 mahl genommen und das andere, wie viel 432, 40 mahl genommen sey. Ich soll es aber von beyden in einer Zahl angeben.

14. Soll nun 432 mit 342 multiplicirt werden, so will man noch wissen, wie viel 432 außer 42 mahl genommen, noch 400 mahl genommen beträgt; ich würde dann rechnen müssen:

```
  432
  342
-----
  864
 1728
 1296
-----
147744   ganz nach den vorigen Gründen.
```

Auf ähnliche Art bey noch mehrern Zahlen des Multiplicators.

15. Hat

15. Hat der Multiplicator am Ende eine o, so wird das ganze Product o, denn wenn ich eine Zahl nicht nehme, so habe ich Nichts. Die folgenden Producte werden, wie vorhin, herausgerückt, als:

238
60

000
1428

Prod. 14280

16. Indessen gebraucht man diese Umstände nicht, wenn man gleich so rechnet:

238
60

Prod. 14280 , oder

238
60

14280

In beyden Fällen mußte doch die o hinter die 8, weil die 8 ein Product von den 6 Zehnern war und also Zehner enthielt.

17. Sind in der Mitte des Multiplicators eine, oder mehrere Nullen, so würde man eigentlich, wie vorhin, so bald das Multipliciren mit ihnen zu verrichten wäre, ihrenthalben eine ganze Reihe im Producte mit Nullen anfüllen, als:

4562
2003

13686
0000
0000
9124

Prod. 9137686; allein man kann auch dieser Umstände sich überheben, wenn man nur mit den wirklichen Zahlen multiplicirt, aber genau auf ihren Werth Acht giebt, um das Product in die rechte Stelle zu bringen, da man denn für eine jede Null eine Stelle überschlägt, wie vorhin

4562
2003
13686
9124..
Prod. 9137686 Hier mußten die 4 Tausender in die Stelle der Tausender im Producte gesetzt werden.

17. So bald Multiplicandus und Multiplicator am Ende Nullen haben, so darf man nur die Zahlen unter sich ordentlich multipliciren und so viele Nullen dem Producte anhängen, als Nullen im Multiplicandus und Multiplicator stecken, das giebt das wahre Product. Als: 40
20
800, denn statt des Umständlichen 40
20
00
80
Prod. 800
erhielt ich so eben das. Wenn ich nämlich 4 Zehner zu Einern mache, so werden selbige um zehnmahl weniger, als sie sind; multiplicire ich diese zu Einern gemachte Zehner nun noch, statt mit 2 Zehnern, mit 2 Einern, so werden sie auch hierdurch wiederum zehnmahl weniger, als sie seyn sollten, folglich sind sie um hundertmahl zu wenig und erhalten ihren Werth nur dadurch, daß ich ihnen zwey Nullen anhänge.

Abgekürzte Subtraction, oder Division.

XII. Wenn man versucht, wie oft eine Zahl von einer andern weggenommen werden kann, so erfährt man zugleich, wie oft, oder, wie vielmahl, dieselbe in der andern enthalten ist. Die letztere wird dadurch in lauter gleiche Zahlen zerlegt, daher heißt diese Verrichtung Division (Theilung). Von der 3 finde ich,

daß

daß sie sich von 12, 4 mahl abziehen läßt: denn

12	9	6	3
einmahl 3	zweymahl 3	dreymahl 3	viermahl 3
9	6	3	0

. . . 1 mahl
. . . 2 mahl } die 12 in vier
oder . . . 3 mahl } gleiche Theile
. . . 4 mahl } theilt.

Weil ich aber vermittelst der Einrichtung des Dividirens dieses auf kürzere Art erfahre, so ist die Division nichts anders, als eine abgekürzte Subtraction.

XIII. Die Zahl, welche zertheilt, oder dividirt wird, heißt der Dividendus; die, womit ich dividire, der Divisor; die, welche angiebt, wie oft der Divisor in dem Dividendo enthalten sey, ist der Quotient. Das Zeichen der Division ist: und 12:3=4 heißt, 12 dividirt durch 3, giebt 4, d. i. 3 ist in 12, 4 mahl enthalten.

1. Daher ist der Divisor stets so oft im Dividendo enthalten, als 1 im Quotienten steckt.

2. Das Einmahl Eins verhilft uns dazu, den Quotienten der einfachen Divisoren von 1 bis 9 in alle Dividendos zu finden, die nicht weiter, als 81 gehen: denn so viel mahl eine Zahl zu sich selbst addirt werden muß, um eine andre hervorzubringen, so viel mahl muß sie auch wieder von der andern hinweggenommen werden können, um jene gleich 0 zu machen. Will ich also wissen, wie viel der Quotient von 5 in 30 dividirt wäre, so dürfte ich nur vermittelst des Einmahl Eins die Zahl suchen, die mit 5 multiplicirt 30 giebt, d. i. 6. (5 mahl 6 ist 30.) Also ist 5 in 30, 6 mahl enthalten und 6 ist der Quotient. 8 in 72 ist 9, denn 8 mahl 9 ist 72.

3. So ist also die Division gerade die umgekehrte Multiplication, indem der Quotient ein Factor, der

Divi-

Divisor der andere und der Dividendus das Product ist. Wird also eine Zahl mit einer andern multiplicirt, so erhält man die erstere wieder, wenn man in das Product mit der letztern dividirt. Deswegen bleibt auch eine Zahl dieselbe, wenn sie mit einer andern multiplicirt und durch dieselbe das Product wieder dividirt wird.

4. Eben deswegen wird auch eine Zahl, die sich mit einer Null endigt, um 10 mahl weniger, oder durch 10 dividirt, so bald ich die 0 wegstreiche; so wird 100 durch Wegstreichung der letzten 0 gleich 10, oder 10ø. Werden 2 Nullen weggestrichen, so wird die Zahl durch 100 dividirt, als: 600, wird 6, oder 6øø. (Cap. 2. III. 11.)

5. Wenn der Divisor, vermittelst des Einmahl Eins multiplicirt, den Dividendum nicht ganz giebt, so muß das dem Dividendo nächste stets niedere Product genommen werden, als 5 in 28? 5 mahl 6 ist 30, der Quotient 6 wäre zu groß; folglich 5 mahl 5 ist 25. Das wäre der nächste und rechte.

6. Giebt der Divisor, wenn er mit dem Quotienten multiplicirt wird, den Dividendus nicht ganz, so sagt man: er gehe nicht in dem Dividendus auf. Z. B. 5 geht in 11 nicht auf. Denn der Divisor 5 mit dem Quotienten 2 multiplicirt, giebt den Dividendus 11 nicht ganz, sondern nur 10.

7. Wenn man den Divisor erst mit einer Zahl multiplicirt und dann die Division vornimmt, so wird dadurch der wahre Quotient mit dieser Zahl dividirt, und er muß erst wieder mit derselben Zahl multiplicirt werden, wenn man den wahren Quotienten erhalten will. Z. B. 4 dividirt in 32 ist = 8; multiplicire ich 4 mit 2, so erhalte ich den Quotienten mit 2 dividirt: denn 8 in 32, 4 mahl; 4 ist aber die Hälfte von 8; will ich daher den wahren Quotienten wieder erhalten, so muß ich 4 mit 2 multipliciren = 8. Umgekehrt, wenn der Divisor mit einer Zahl dividirt ist, so ist der Quotient, den man so erhält, mit dieser Zahl multiplicirt und man muß, um

den

den wahren zu finden, den so erhaltenen mit derselben Zahl dividiren. Als 8 in 32, 4 mahl; wird nun 8 mit 2 dividirt, so ist 4 in 32, 8 mahl. Die 8 muß daher erst mit 2 dividirt werden, um den wahren Quotienten 4 zu erhalten.

8. Wird dagegen der Dividendus mit einer Zahl multiplicirt, so muß der Quotient mit dieser Zahl dividirt werden. Z. B. 12:4 = 3. und 24:4 = 6, wo man 6 mit 2 (womit 12 multiplicirt war) dividiren muß, um den wahren Quotienten 3 zu finden. Umgekehrt, wird der Dividendus mit einer Zahl dividirt, so muß der Quotient damit multiplicirt werden, als 16:4=4. 16:2=8 mit 4 dividirt = 2, welcher Quotient mit 2 multiplicirt werden muß, um den wahren 4 zu haben.

XIV. Bey einem aus mehr, als zwey Zahlen, bestehenden Dividendus zieht hinter demselben einen senkrechten Strich, und setzt den Divisor dem Dividendus zur Linken mit dem Zeichen :, oder auch über dem Striche. Hierauf sucht erstlich den Quotienten der forderſten Zahl, und setzt ihn hinter den Strich. Hierauf sucht den Quotienten aus der folgenden Zahl, und setzt ihn hinter den Strich, dem vorigen zur Rechten. Endlich verfahret auf ähnliche Art bey jeder einzelnen folgenden Zahl des Dividendi, so kommt der ganze Quotient zuletzt hinter dem Striche zu stehn. So 846:2

Divisor. Dividendus.

2: 846 | 423 Quotient.

1. 2 in 8, 4 mahl; die 4 als Quotient hinter den Strich; 2 in 4, 2 mahl, die 2 hinter den Strich, der 4 zur Rechten; 2 in 6, 3 mahl, die 3 hinter den Strich; folglich ist 423 der ganze Quotient.

2. Wir sagten zuerst: 2 Einer in 8 Hunderter 4 mahl. Nun sind zwar 2 Einer in 8 Hunderten 400 mahl enthalten: denn 400 × 2 = 800; allein da in dem ganzen Quotienten die 4 noch vor zwey andern Zahlen zu stehen kommt, so wird sie doch daselbst zu 200.

Aus diesem Grunde behandeln wir bey der Division alle Zahlen als Einer, so wie es bey der Multiplication geschieht.

3. In Fällen dieser Art können wir mit dem Dividiren auch von hinten anfangen, 2 in 6, 3 mahl; 2 in 4, 2 mahl; 2 in 8, 4 mahl.

4. Sobald der Divisor in jeder Zahl des Dividendi nicht stets ganz enthalten ist, wird das Verfahren zusammengesetzter, als 768:3 Schreibet

```
 3
768 | 256
6::
---
16.
15.
---
 18
 18
---
  0
```

3 in 7, 2 mahl; 3, 2 mahl ist nur 6 (dies ist eine gleich angestellte Art der Probe), im Dividendo steht aber 7; die 6 also unter die 7 gesetzt und abgezogen, um zu sehen, was von den 7 Hunderten übrig bleibt. Rest 1. dazu die Zahl 6 aus dem Dividendo (der bequemern Uebersicht wegen) hinab; 3 in 16, 5 mahl; 3 mahl 5 ist 15, Rest 1. dazu die 8; 3 in 18, 6 mahl; 3 mahl 6 ist 18; Rest 0.

5. In den 7 Hundertern steckt zwar die 3 noch öfter, als 200 mahl: denn $200 \times 3 = 600$, also ist noch 100 übrig. Allein in diesem 100 steckt sie doch nicht mehr Ein Hundert mahl, folglich kann aus den 100 für die Classe der Hunderter in dem Quotienten keine Einheit erwachsen, daß ich in denselben statt 2, könnte 3 setzen. Daher wird dieser eine Hunderter zu den 6 Zehnern addirt, und gesagt: 3 in 16, 5 mahl. Hier geht nichts verloren. Aus ähnlichem Grunde wird ein Zehner Rest zu den 8 Einern genommen, und so ist die 3 in die ganze Zahl 768 richtig dividirt. Nämlich:

3 in

3 in 600 = 200
3 in 150 = 50
3 in 18 = 6
768 256

6. Die Division wird eben deswegen von der linken nach der rechten Hand vorgenommen, weil man so durch Uebertragung eines Restes in die folgende Classe am kürzesten wegkommt.

7. Ist die hinuntergerückte Zahl kleiner, als der Dividendus, so ist der Quotient o und es wird nun die folgende zu ihr hinuntergesetzt und in beyde dividirt. 749:7

```
      7
749 | 107
 7:: |
-----|
 049
  49
-----
   0
```

7 in 7, 1 mahl; 7 in 4, o mahl; 7 in 49, 7 mahl: denn 7 ist in 4 Zehnern keinesweges als ein Zehner (das wäre 70 in 40) enthalten; daher kommt in die Stelle der Zehner o; aber 7 in 49 Einern 7 mahl.

8. Folgt in dem Dividendo in einer Classe o, so kommt die o allerdings hinunter, und wird mit dem schon vorhandenen Reste eine ordentliche Zahl, in welche dividirt wird, als: 5

```
 605 | 121
 5:. |
-----|
  10.
  10'
------
   05
    5
------
    0
```

9. Folgt eine o im Dividendus, wo kein Rest ist, so kommt sie doch hinunter und es kommt in den Rest o.

Als: 6:606|101 denn 6 in 6 Hunderten 1 mahl, in keinem Zehner 0 mahl, in 6 Einer 1 mahl.

006
6
0

10. So lange kommen stets neue Nullen in den Quotienten, als neue Nullen aus dem Divisor hinunter gerückt werden. 4: 8000|2000
8:::|
0000

XV. Besteht der Divisor aus zwey Zahlen, so dividirt mit beyden in die beyden ersten Zahlen des Dividendus; der Quotient ist eine einfache und kommt als die erste Zahl des ganzen Quotienten hinter den Strich. Uebrigens verfahret, indem ihr stets nur eine Zahl aus dem Dividendus hinunter rückt, völlig wie vorhin.

24: 7944|331
72::|
74:
72:
24
24
0

1. 24 in 79, 3 mahl; 3 mahl 24 ist 72, von 79; Rest 7. Die 4 hinunter. 24 in 74, 3 mahl. 3 mahl 34 ist 72, von 74, Rest 2. Die 4 hinunter. 24 in 24, 1 mahl. 24 von 24, Rest 0.

2. Daß 24 in 79, 3 mahl stecke, ergiebt sich aus dem Versuch der Division der ersten Zahl des Divisors in die erste des Dividendus. 2 in 7, 3 mahl, also wahrscheinlich 24 in 79, 3 mahl.

3. Indessen (zumahl wenn ein Divisor am Ende aus großen Zahlen, als 6. 7. 8. 9. besteht) kann die erste Zahl zwar einige mahle in der ersten des Dividendus stecken, und doch können die übrigen des Divisors nicht eben so oft

in

in den darüberstehenden übrigen des Dividendus enthalten seyn, als:

21 : 609 | 29.
42: |
189
189
0

Denn 2 in 6, 3 mahl; aber nicht 21 in 60, 3 mahl. Deswegen ist die gleich angestellte Probe (XIV. 4.) gut: die gefundene Zahl des Quotienten mit dem Divisor gleich zu multipliciren. 21, 3 mahl ist 63, von 60 geht nicht. Darum muß ich sagen: 2 in 6, 2 mahl; 2 mahl 21, ist 42, u. s. w.

4. Es kann die erste Zahl des Divisors in der ersten des Dividendus gar nicht enthalten seyn; alsdann dividiren wir mit derselben in die beyden ersten des Dividendus, als: 48 in 3072 | 64.
288: |
192
192
0

Denn 4 in 3 geht nicht; eben so 48 in 30 nicht; also 4 in 30, oder 48 in 307, 6 mahl, u. s. w.

5. Dafern nach einer gemachten Subtraction ein so kleiner, oder kein, Rest bleibt, daß in die folgende Zahl nicht dividirt werden kann, so bekömmt der Quotient 0, und es kommt eine neue Classe hinunter (wie vorhin); läßt sich dann noch nicht darin dividiren, so bekommt der Quotient abermahl 0, bis die Division statt findet, als:

71 : 64113 | 903
639:: |
213
213
0

oder

84 : 840252 | 10003
84:::: |
00252
252
0

XVI. So wie der Divisor nicht immer in jeder Zahl des Dividendus ganz steckt, so steckt er auch nicht stets gewisse mahle ganz in dem ganzen Dividendo, z. B.

3: 13 | 4.
12 |
1

Hier ist 3 in 13, 4 mahl enthalten, sollte sie 5 mahl in einer Zahl stecken, so müßte diese 15 seyn. Die 1, welche hier übrig ist über 12, ist eine Einheit von den 13

des Dividendus, weswegen sie auch der Rest heißt. Ob nun also gleich 3 in 13, 4 mahl enthalten ist, so hat sie doch auch an dieser 1 einen Antheil und steckt darinnen, wenn gleich nicht ein ganzes Mahl, doch einem Theile nach. Davon ein Mehreres im folgenden Capitel.

1. Hätten wir das Exempel

```
      20
  804|40
   80
  ----
   04
```

so würden wir zwar bey der hinuntergerückten 4 sagen 20 in 4, 0 mahl; allein die 4 würde nun auch als Rest anzusehn seyn: denn 20 war in 800 wirklich 40 mahl, es sind also noch 4 übrig.

XVII. Die Probe eines ganzen Multiplications-exempels geschieht durch die Division. Denn da 2, viermahl genommen, 8 giebt, so muß 2 in 8 auch viermahl seyn. Wenn man folglich mit dem einen Factor in das Product dividirt, so muß der Quotient den andern Factor geben, wenn man recht gerechnet hat. Die Probe, ob bey einer Division der rechte Quotient erhalten sey, wird angestellt, indem man den Quotienten mit dem Divisor multiplicirt; es kommt alsdann der Dividendus heraus, wenn der gefundene Quotient der rechte ist. So 4:48|12, und die Probe 12 . Ist

```
  4
 --
 48
```

ein Rest übrig geblieben, so wird er zu dem aus dem Multiplicator und Quotienten erhaltenen Producte addirt, so muß die dann erfolgende Summe dem Dividendo gleich seyn.

```
4: 97|24
 8:  | 4
-----  --
 17    96
 16    1
-----  --
  1    97
```

Zusätze zur Division.

Von einigen Eigenschaften der Zahlen in Ansehung der Division.

XVIII. **Primzahlen** sind solche, die durch keine kleinere Zahl, ohne Rest zu lassen, dividirt werden können. Als: 1. 2. 3. 5. 7. 11. u. s. w.

XIX. **Gerade Zahlen** heißen die, welche sich durch 2 ohne Rest dividiren lassen. Als: 4. 8. 10. 18. 100. ꝛc.

XX. **Ungerade** nennt man die, welche durch 2 dividirt, einen Rest lassen, als 15. 27. Dieses sind deswegen nicht Primzahlen: denn 15 geht durch 5 und 27 durch 9 auf.

XXI. **Zusammengesetzte Zahlen** sind solche, die man als aus einer Multiplication anderer Zahlen entstanden, sich denkt. Als 30, wäre aus 5×6 entstanden, oder aus 10×3; ferner, 15, aus 3×5. So wären 5. 6. so wie auch 10 und 3 die Factoren von 30; und 3 und 5 die Factoren von 15.

XXII. Aus Primzahlen und Primzahlen, auch ungeraden Zahlen, können auf solche Art ungerade Zahlen zusammengesetzt werden, die sich ohne Rest durch Primzahlen, oder ungerade Zahlen, dividiren lassen, als 15 durch 5, 27 durch 9.

XXIII. Aus lauter geraden Zahlen bestehende Zahlen lassen sich nur durch gerade Zahlen ohne Rest dividiren (welches wir künftig das Aufheben nennen wollen). Z. B. 284 wird sich nie durch 3. 5. 9. ꝛc. aufheben lassen.

1. Solche Zahlen werden stets durch die 2 aufgehoben. Als: 2

$$864|432.$$

2. Auch kann in solchen Zahlen, oder am Ende, eine o stehen, als: 2 2

$$206|103;\quad 480|240$$

3. Viele solche Zahlen gehen durch die 4 auf, als: 4 Dies geschieht stets, wenn sich die beyden 48|12. letzten einer solchen Zahl durch 4 aufheben lassen, als: 4

528|132, denn 4 in 28, 7 mahl.

4. Alle Zahlen, die durch 4 aufgehoben werden, lassen sich auch durch 2 aufheben.

5. Durch 8 gehn einige Zahlen auf, die sich mit 8, 6, 4, 2, o endigen, 8 8

488|61, oder 80|10; alle, wo die drey letzten Zahlen durch 8 aufgehen, als: 8

5232|654, nämlich 8 geht in 232 auf.

6. Alle diese Zahlen lassen sich auch durch 4 und 2 aufheben.

7. Durch 6 gehn alle am Ende geraden Zahlen auf, dafern selbige, unter sich als Einer zusammen gezählt, durch 3 aufgehn, als: 6

672|112. Denn 6+7+2 sind 15, und 3 geht in 15 auf.

8. Alle Zahlen, die durch 6 aufgehn, gehn auch durch 3 auf.

XXIV. Durch ungerade Zahlen gehen gerade und ungerade auf. Als 486 durch 3; und 1371 gleichfalls durch 3.

1. Durch die 3 gehen die Zahlen auf, in welchen, wenn man ihre besondern Zahlen als Einer ansieht und zusammenzählt, bey der Division kein Rest bleibt. Als: 3

3534|1178, nämlich 3+5+3+4 sind 15, worin 3 aufgeht.

2. Durch 9 werden alle Zahlen aufgehoben, in welchen, wenn auf vorher beschriebene Art ihre besondern

Zahlen

Zahlen addirt werden, und die Summe durch 9 dividirt wird, kein Rest bleibt, als: 9

8541|949,

Da 8+5+4+1=18 ist, worin 9 aufgeht.

3. Solche Zahlen werden alle auch durch die 3 aufgehoben.

4. Durch 5 gehn alle sich in 5 und 0 endigenden Zahlen auf, als: 5 5

235|47 oder 290|58.

5. Die Handgriffe, Zahlen, welche durch die 7 aufgehn, kenntlich zu machen, sind weitläufiger, als der Versuch selbst.

6. Es giebt aber, so wie kleine (XVIII.), so auch große Primzahlen, die folglich gar nicht aufgehoben werden können, als 39, 91, 837. Dabey scheinen oft Zahlen Primzahlen zu seyn, die es nicht sind; so geht 679 durch 7, eben so 3521 durch 7 auf.

Das vierte Capitel.

Von den Brüchen in unbenannten Zahlen (1. Cap. I. 7.).

Natur der Brüche.

I. Man kann sich die 1 in Theile zerlegt gedenken. Diese Theile sind zusammengenommen der 1 gleich; fehlt nur einer derselben, so machen die übrigen zusammengenommen noch nicht 1 aus, und ein jeder dieser Theile ist kleiner, als 1.

II. Sind die Theile, worin die 1 zerlegt ist, unter einander ungleich, so sind sie keiner Rechnung unterworfen: denn sie können nicht gezählet werden (1. Cap. I. 4.). Sind sie aber unter einander völlig gleich, oder werden dafür gehalten, so kann mit ihnen gerechnet werden, indem sie die völligen Eigenschaften der

ganzen Zahlen behalten. Es heißt alsdann ein solcher Theil, oder mehrere solche Theile zusammengenommen, ein Bruch (eine gebrochene Zahl).

III. Bey jedem Bruche findet also folgendes nothwendig statt: Erstlich. Liegt die 1 als ein Ganzes zum Grunde. Zweytens. Dieses Ganze ist in Theile zerlegt, die einander völlig gleich sind, oder seyn sollen. Drittens. Es ist davon ein Theil, oder es sind davon mehrere Theile, genommen. Dieser auf diese Art genommene eine, oder mehrere, Theile formiren den arithmetischen Bruch.

IV. Die Theile der in zwey Theile getheilten 1, heißen Hälften; der in drey getheilten, Drittel; der in vier, Viertel; der in fünf, Fünftel; ꝛc. der in Hundert, Hundertel; ꝛc. in Tausend, Tausendtel, u. s. w.

V. Sobald die Theile der 1 zusammen da sind, so ist auch die 1. wieder vorhanden, und es existirt kein eigentlicher Bruch mehr (I.).

VI. Da nun zur Beurtheilung eines Bruches, sowohl die Zahl der Theile, worin die 1 zerlegt ist, als auch die Zahl der davon vorhandenen, die den Bruch formiren (III.), bekannt seyn muß, so sind, um einen Bruch auszudrücken, stets zwey Zahlen erforderlich. Die, welche das erstere angiebt, heißt der Nenner; die, welche das letztere anzeigt, der Zähler.

1. Der Nenner benennet gleichsam den Bruch. Ist die 1 in drey Theile getheilt, so sind es Drittel; in vier, so sind es Viertel; in fünf, so sind es Fünftel; in Hundert, so sind es Hundertel. Der Zähler zählt die vorhandenen den Bruch formirenden Theile, als 2 Viertel, 6 Achtel, 60 Hundertel, wo also 2. 6. 60 Zähler sind.

Schreiben der Brüche.

VII. Zu dem Schreiben der Brüche gebrauchet die gewöhnlichen Zifern; setzet aber die den Bruch andeutenden Zifern über einander, so, daß der Zähler stets oben, der Nenner stets unter ihm steht; zwischen beyden zieht einen Queerstrich. $\frac{2}{3}$ sind zwey Drittel; $\frac{50}{60}$ funfzig Sechzigstel.

1. In $\frac{2}{3}$ ist, 3 der Nenner, 2 der Zähler: denn hier ist die 1 in 3 Theile zerlegt, und 2 Theile sind davon da, die den Bruch formiren. In $\frac{50}{60}$ ist 1 in 60 Theile zerlegt, 50 davon sind vorhanden in dem Bruche.

2. Schreibet die Zifern des Bruches kleiner, als andre, z. B. Ein ganzes und zwey Drittel schreibet $1\frac{2}{3}$.

3. Eine größere Zahl ist nie in einer kleinern einmahl ganz enthalten; allein doch nach einem, oder einigen, ihrer Theile. Z. B. 4 ist in 1 nur dem vierten Theile nach enthalten. Sobald also die kleinere Zahl durch die größere dividirt werden soll, so entsteht kein Quotient einer ganzen Zahl, sondern nur ein Bruch, als 1 : 4 ist $\frac{1}{4}$. Das Bruch-Zeichen drückt daher auch eine Division aus, weil ein Viertel eben das ist, als 1 durch 4 dividirt. Diese Bezeichnung sagt, daß nur der vierte Theil von der 4 in 1 stecke. Sobald also eine kleinere Zahl durch eine größere dividirt werden soll, darf man nur, um den Quotienten zu haben, sie als einen Bruch ausdrücken, dessen Zähler die kleinere Zahl ist. Z. B. 12 dividirt durch 13 ist $= \frac{12}{13}$. Es sagt dann der Quotient, wie viel Theile der größern Zahl in der kleinern stecken.

4. Bey der Division der 13 durch 3 (3. Cap. XVI.) ward der Quotient 4 erhalten, 1 blieb übrig. Es müßte also 1 durch 3 dividirt werden, um den Quotienten ganz zu erhalten. Nun steckt 3 blos nach seinem dritten Theile in 1, es kann also auch nur $\frac{1}{3}$ mahl davon genommen werden. Der ganze Quotient ist also $4\frac{1}{3}$.

Darum

Darum drücket jeden Rest bey der Division als einen Bruch aus, dessen Zähler der Rest, der Nenner der Divisor ist.

14:3 giebt zum Quotienten 4, zum Rest 2, also 4$\frac{2}{3}$ zum ganzen Quotienten. Denn 2 sollte durch 4 dividirt werden. Es ist aber 4 in 2 nur nach 2 seiner Theile, oder nach 2 Vierteln $= \frac{2}{4}$ enthalten, folglich kommen in den Quotienten aus dem Reste noch $\frac{2}{4}$. Denn ist 4 in 1 nach einem Viertel, so ist es in 2 nach zwey Vierteln enthalten.

Größe der Brüche.

VIII. Die Größe des Bruchs hängt ab von der größern, oder geringern, Menge der Theile von 1, die in dem Bruche stecken, folglich nicht von der Größe der Zahlen an sich (größer heißt z. B. 100 gegen 10.), die den Bruch ausdrücken. So ist $\frac{3}{4}$ ein weit größrer Bruch, als $\frac{100}{100}$, d. h. ich habe bey $\frac{3}{4}$ mehr vom Ganzen, als bey $\frac{100}{100}$.

1. Jemehr die Zahl des Zählers sich der Zahl des Nenners nähert (z. B. 11 ist 12 näher als 11. 14), desto größer ist der Bruch. Z. B. $\frac{3}{4}$ ist mehr, als $\frac{2}{4}$. Werden beyde einander gleich, so hört der Bruch auf zu seyn und wird $= 1$ als $\frac{4}{4}$ (V.).

2. Weil, wenn der Nenner aus einer großen Zahl besteht, die Theile kleiner sind, als wenn der Nenner aus einer kleinern Zahl besteht, so ist der Bruch um desto größer, wenn bey einem großen Nenner der Zähler sich ihm sehr nähert. Z. B. bey $\frac{3}{4}$ und $\frac{99}{100}$ ist die Differenz zwischen Zähler und Nenner nur ein Theil des Nenners; allein dieser eine Theil ist bey dem ersten $\frac{1}{4}$ und bey dem andern $\frac{1}{100}$, folglich ist auch $\frac{99}{100}$ ein weit größerer Bruch, als $\frac{3}{4}$.

3. Die Theile der 1, woraus ein Bruch entsteht, haben die Eigenschaften der ordentlichen Zahlen und daher

werden

werden mit ihnen die Veränderungen den Gesetzen des Zählens gemäs, wie bey den ganzen Zahlen, vorgenommen. $\frac{1}{4} + \frac{2}{4}$ sind $\frac{3}{4}$; zählet nämlich die Zähler 1 und 2 wie die ordentlichen Zahlen unter sich zusammen, so habt ihr 3, welche hier Viertel $= \frac{3}{4}$ sind, u. s. f. $\frac{3}{8} + \frac{1}{8} + \frac{2}{8} = \frac{6}{8}$, und $\frac{4}{5} \quad \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$, nämlich ziehet von 4, 2 ab, so bleiben Rest 2, welches $\frac{2}{5}$ sind ꝛc.; ferner $\frac{3}{20}$ mit 6 multiplicirt, sind $\frac{18}{20}$, denn 3, 6 mahl genommen, sind 18, welches hier 20tel sind, eben so als: $\frac{3}{20} + \frac{3}{20} + \frac{3}{20} + \frac{3}{20} + \frac{3}{20} + \frac{3}{20} = \frac{18}{20}$. $\frac{4}{12}$ mit 2 sind $\frac{8}{12}$, und so auch $\frac{16}{20}$ dividirt durch $\frac{4}{20}$, 4 mahl; weil 4 in 16, 4 mahl, also $\frac{4}{20}$ in $\frac{16}{20}$ 4 mahl stecken, u. s. f. $\frac{21}{30} : \frac{3}{30} = 7$.

Unächte Brüche.

IX. Ob gleich $\frac{4}{4}$ ein Ganzes ist, $= 1$, so kann man doch beym Rechnen $\frac{4}{4}$ erhalten und schreiben, z. B. $\frac{3}{4} + \frac{1}{4}$ sind $\frac{4}{4}$; ja es giebt Fälle, wo man die 1 als einen Bruch auf eine solche Art ausdrücken muß. Ein solcher Bruch ist aber ein unächter Bruch.

1. Es kann sogar der Zähler größer, als der Nenner, werden. Das ist gleichfalls ein unächter Bruch, als $\frac{5}{4}$. Hier ist 1 in 4 Theile getheilt, welche alle 4 vorhanden sind; es ist aber noch ein Theil einer zweyten in 4 Theile getheilten 1 da, folglich $\frac{4}{4}$ und $\frac{1}{4}$, d. i. 1 und $\frac{1}{4}$. Solche oft vorkommende Brüche, wo eine ganze Zahl mit einem Bruche zusammengefaßt und als ein einziger Bruch ausgedrückt ist, heißen daher auch unächte Brüche.

2. Auf diese Art kann man auch solche unächte Brüche erhalten, worinnen größere Zahlen stecken, als: $\frac{8}{4}$, d. i. $\frac{4}{4} + \frac{4}{4}$ gleich 2. $\frac{9}{3}$ d. i. $\frac{3}{3} + \frac{3}{3} + \frac{3}{3} = 3$.

3. Eine solche Zahl kann noch einen ächten Bruch mit bey sich haben, als $\frac{11}{4}$, d. i. $\frac{4}{4} + \frac{4}{4} + \frac{3}{4} = 2\frac{3}{4}$. Das alles nennt man unächte Brüche.

X. Es kann eine ganze Zahl mit einem Bruche zusammengestellt und verbunden, ohne deswegen als ein Bruch ausgedrückt zu werden, z. B. $1\frac{1}{4}$; $5\frac{2}{13}$; $3\frac{7}{9}$ u. s. w. Solche Brüche heißen die Rechenbücher vermischte Brüche und sie können stets zu unächten formirt werden.

Gebrochne Brüche.

XI. Auch selbst ein Bruch kann als 1 angesehn und in gewisse gleiche Theile zerlegt werden, von welchen einer, oder mehrere, genommen werden, woraus denn eine neue Art von Brüchen entsteht. Wenn A und B von einer Erbschaft $\frac{3}{4}$ erhielten, so hat jede dieser beyden Personen von $\frac{3}{4}$ der Erbschaft die Hälfte, oder $\frac{1}{2}$ von $\frac{3}{4}$. Es werden also die $\frac{3}{4}$ in der letztern Beziehung als 1 angesehn und vom neuen zertheilt, und zwar in zwey gleiche Theile getheilt, von denen A den einen Theil, und B den andern empfängt. Solche Brüche heißen gebrochne Brüche, weil aus einem bereits vorhandenen Bruche ein neuer gemacht wird.

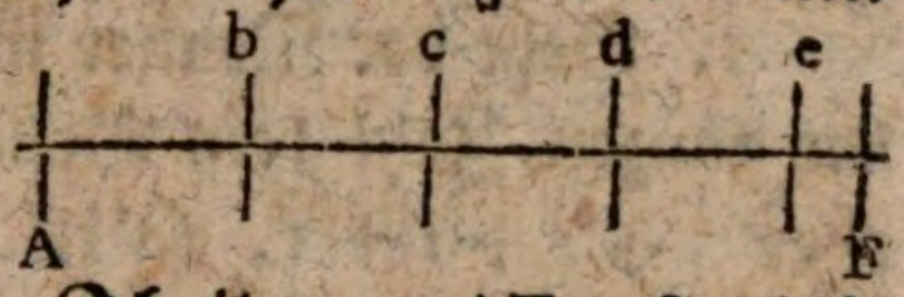
1. Es ist $\frac{1}{2}$ da, von welchem $\frac{1}{4}$ genommen wird. Man hat also $\frac{1}{4}$ aus $\frac{1}{2}$. Diese Brüche findet man oft, $\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}$, auch $\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}$ bezeichnet, welche Bezeichnung nicht passend ist. Oder es sind $\frac{2}{3}$ aus $\frac{3}{4}$ genommen; das wäre $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}}$. Es ist aber natürlicher, $\frac{2}{3}$ aus $\frac{3}{4}$ zu schreiben.

XII. Es kann kommen, daß der Zähler eines Bruchs außer einem, oder mehrern, Theilen des Nenners noch einen Bruch von einem solchen Theile in sich faßt, als $\frac{1\frac{1}{2}}{4}$, d. i. ein Viertel und ein halbes Viertel.

1. Diese Art von Brüchen kommen in den Handlungen oft vor, bey Ellen- und Gewichts-Maaße. Die Bezeichnung ist recht. Es sind Brüche von gebrochnem

Zähler. Uebel ist die Bezeichnung einiger Handelsleute $1\frac{1}{4}$, welches ein und ein halbes Viertel heißen soll.

XIII. Man kann sich 1 in einige gleiche Theile dergestalt zerlegt denken, daß außer diesen noch ein, oder einige, gleiche Theile eines solchen Theiles zu der 1 mit gehören. Z. B. in der Linie



sind Ab, bc, cd, de 4 gleiche Theile von AF, sie lassen aber an dieser Linie noch ef übrig, welches $\frac{1}{4}$ von Ab, oder de ist. Ist nun AF gleich 1, so ist Ab ein Theil von der in 4 gleiche und noch $\frac{1}{4}$ eines solchen Theils getheilten 1. Es macht also Ab einen Bruch aus, dessen Zähler ein Theil und der Nenner $4\frac{1}{4}$. Der Bruch müßte also $\frac{1}{4\frac{1}{4}}$ bezeichnet werden. Eben so $\frac{1}{33\frac{1}{3}}$, wo die 1 in $33\frac{1}{3}$ getheilt ist. Man kann in Rechnungen auf solche Fälle stoßen. Dies wären Brüche von gebrochnem Nenner.

XIV. Daher wird auch der Bruch $\frac{1\frac{1}{2}}{33\frac{1}{3}}$ entstehn können, wenn wir von der in $33\frac{1}{3}$ getheilten 1, $1\frac{1}{2}$ Theil hätten. Da wäre ein gebrochner Zähler und Nenner vorhanden. Da aber diese Brüche leicht in einfache verwandelt werden können (davon unten), so kommt diese Bezeichnung gewöhnlich nicht vor.

Reduction der unächten Brüche.

XV. Ist ein unächter Bruch vorhanden, so wird die in ihm steckende ganze Zahl (IX.) von ihm abgesondert und er übrigens in einen ächten verwandelt, indem man mit seinem Nenner in seinen Zähler dividirt.

Der

Der Quotient ist die darin steckende ganze Zahl. Bleibt ein Rest übrig, so ist er der Zähler des dabey noch vorhandenen ächten Bruchs, dem man den alten Nenner läßt. (IX. 3.) $\frac{7}{4}$ sind daher $1\frac{3}{4}$: denn so oft $\frac{4}{4}$ in $\frac{7}{4}$ sind, so oft ist 1 darin, (denn $\frac{4}{4} = 1$. IX. 1.), und der Rest 3 ist $\frac{3}{4}$ als ein ächter Bruch (IX. 3.).

1. Geht der Nenner in dem Zähler auf, so ist außer der ganzen Zahl kein Bruch vorhanden, $\frac{28}{7}$ ist gleich 4, oder $1+1+1+1$. (VIII. 1. und IX. 2.).

2. Sind mehrere ganze Zahlen nebst einem ächten Bruche durch einen unächten Bruch ausgedrückt, so werden gleichfalls durch die Division des Nenners in den Zähler die ganzen Zahlen nebst dem ächten Bruche erhalten. Als: $\frac{23}{7}$ gleich $3\frac{2}{7}$, denn $\frac{7}{7}+\frac{7}{7}+\frac{7}{7}+\frac{2}{7}$ sind $\frac{23}{7}$ aber auch gleich $3\frac{2}{7}$.

Resolution einer ganzen Zahl in einen Bruch.

XVI. Muß dagegen eine ganze Zahl in einen unächten Bruch verwandelt (resolvirt) werden, so nehme man den Nenner, den der neue Bruch haben soll und multiplicire damit die ganze Zahl. Das Product wird der Zähler zu diesem Nenner. Z. B. 3 soll in Viertel verwandelt werden, so multiplicirt mit diesem Nenner 4 die Zahl 3, so ist $\frac{12}{4}$ als ein unächter Bruch gleich 3.

1. Soll ein ächter Bruch nebst einer ganzen Zahl in einen unächten resolvirt werden, so darf man nur die ganze Zahl mit dem Nenner des ächten Bruchs multipliciren und den Zähler dazu addiren. So wären $4\frac{2}{4}$ gleich dem unächten Bruche $\frac{18}{4}$. Denn $\frac{4}{4}$ ist gleich 1, folglich $\frac{4}{4}$ viermahl $= \frac{16}{4}+\frac{2}{4} = \frac{18}{4}$; $3\frac{2}{7}$ ist $= \frac{17}{7}$; $20\frac{1}{9} = \frac{180}{9}$.

Veränderungen der Brüche.

XVII. Wenn der Zähler eines Bruchs durch eine ganze Zahl multiplicirt wird, der Nenner aber unverändert

ändert bleibt, so wird der Bruch größer, und zwar um so viel mahle, als der Multiplicator Eins in sich enthält.

In diesem Falle bleiben nämlich die Theile, worin 1 zerlegt ist, nach ihrer Menge, und folglich auch Größe, unverändert, es werden aber durch die Multiplication die den Bruch formirenden Theile des Zählers so oft vervielfältiget, als 1 in dem Multiplicator steckt. Als, wenn in $\frac{2}{12}$ der Zähler mit 4 multiplicirt wird, so sind $\frac{8}{12}$ 4 mahl so viel, als $\frac{2}{12}$ waren, so wie 1 in 4 viermahl steckt.

1. Daher ist, den Zähler eines Bruchs mit einer ganzen Zahl multipliciren, so viel, als den ganzen Bruch mit dieser Zahl multipliciren.

XVIII. Wird der Nenner mit einer ganzen Zahl multiplicirt, und der Zähler bleibt unverändert, so wird der Bruch um so viel mahl kleiner, als der Multiplicator Eins in sich enthält.

Hier werden die Theile, worin Eins zerlegt war, um so oft vervielfältigt, als 1 in dem Multiplicator steckt, folglich, da 1 sich selbst gleich bleibt, werden sie auch um so vielmahl kleiner, als sie vorher waren. Nun bleibt mit dem unveränderten Zähler die Zahl der Theile, folglich habe ich nicht mehr und doch um so vielmahl kleinere Theile, also auch um so vielmahl weniger, als 1 in dem Multiplicator steckt. Wenn in $\frac{4}{12}$ 12 mit 2 multiplicirt wird, so erhalten wir $\frac{4}{24}$. Das ist halb so viel, als vorher.

1. Deswegen, wenn der Nenner eines Bruchs mit einer ganzen Zahl multiplicirt wird, so ist es eben das, als wenn der ganze Bruch durch diese Zahl dividirt würde.

XIX. Wenn Zähler und Nenner mit einerley Zahl multiplicirt wird, so wird der Bruch gar nicht verändert. Hier werden zwar die Theile im Zähler vervielfältiget; aber durch gleiche Vervielfältigung im Nenner auf gleiche Art im Nenner kleiner gemacht: denn $\frac{6}{12} \times 2$ ist $\frac{12}{24}$, wo zwar die 6 vorhandenen Theile 2 mahl erhalten; aber, da sie nun 24tel wurden, nur halb so groß, als vorher, erhalten wurden, und folglich nicht mehr und nicht weniger, als vorher, da ist; und $\frac{6}{12}$ und $\frac{12}{24}$ ist jedes die Hälfte von 1.

XX. Die Division ist das Gegentheil der Multiplication (3. Cap. XIII. 3.). Wird demnach der Zähler mit einer ganzen Zahl dividirt, der Nenner aber bleibt unverändert, so wird der Bruch kleiner, oder durch diese Zahl selbst dividirt, daher $\frac{4}{8} : 2$ ist $\frac{2}{8}$; wird bey unverändertem Zähler der Nenner mit einer ganzen Zahl dividirt, so wird der Bruch größer, oder durch diese Zahl multiplicirt. $\frac{2}{8} : 2$ ist $\frac{2}{4}$. Wird Zähler und Nenner durch einerley Zahl, die in beyden aufgeht, dividirt, so geben die Quotienten einen völlig gleichen Bruch. $\frac{4}{8} : 2$ ist $\frac{2}{4}$. Hier wird zwar die Zahl der Theile des Zählers durch die Division vermindert, aber durch die Division des Nenners werden diese Theile um eben so viel wieder vergrößert.

1. Den Nenner eines Bruchs durch eine ganze Zahl dividiren, ist so viel, als den Bruch selbst damit multiplíciren, und den Zähler eines Bruchs durch eine ganze Zahl dividiren, ist so viel, als den Bruch damit dividiren.

2. Daher kann ich einem Bruche eine mannigfaltige Gestalt (das heißt, ganz verschiedene Zahlen im Zähler und Nenner) geben und verändere seinen Werth doch nicht. So ist $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{8}{16}$ einerley, indem jedesmahl Zähler und Nenner mit 2 multiplicirt wurden.

3. So kann ein Bruch auch seiner Gestalt nach durch die Division verändert werden, und doch denselben Werth behalten.

behalten. Wenn nämlich der Zähler und Nenner durch einerley Zahl dividirt wird, so geben die Quotienten einen völlig gleichen Bruch (XX.). $\frac{24}{48} : 2 = \frac{12}{24}$; $\frac{6}{12} 2 = \frac{3}{6}$, welche alle einander gleich sind; eben so $\frac{24}{48}$ ist $= \frac{8}{16}$ und $\frac{8}{16} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, denn $\frac{24}{48} : 3 = \frac{8}{16}$ und $\frac{8}{16} : 4 = \frac{2}{4}$ $\frac{8}{16} : 8 = \frac{1}{2}$.

4. Es geschiehet häufiger, daß man durch dieses Dividiren den Brüchen eine kleinere Zahl giebt, als daß man diese durch die Multiplication vergrößern sollte. Denn $\frac{1}{2}$ läßt sich besser übersehen, als $\frac{6}{12}$, oder gar $\frac{75}{150}$, ob gleich alle drey Brüche einerley sind. Deswegen sucht man in den Anweisungen zur Rechenkunst zu zeigen, wie man dies am geschwindesten durch das Dividiren bewerkstelligen, und also aus einem mit größern Zahlen geschriebenen Bruche einen mit kleinern, oder den möglichst kleinsten, geschriebenen, am Werthe gleichen, Bruch schnell darstellen könne. Man nennt dies, wie wohl mit nicht recht passendem Namen, das Aufheben der Brüche.

Aufheben der Brüche.

XXI. Weil, wenn Zähler und Nenner durch einerley Zahl dividirt werden, die Quotienten einen völlig gleichen Bruch geben, so dividirt, um einen ächten Bruch aufzuheben, mit der Zahl des Zählers in Zähler und Nenner, so wird, wenn diese Zahl in dem Nenner ganz aufgeht, der Quotient denselben Bruch wieder als einen ächten Bruch und zwar in den geringsten Zahlen geben, als: $\frac{24}{96} \mid \frac{24}{4}$.

1. In diesem Falle wird der Zähler stets 1.

XXII. Dafern dieses (als ein seltener Fall) nicht angeht, so versuchet es, Zähler und Nenner mit einerley Zahl unter den Einern unter Anwendung der (Cap. 3. XXIII.) ertheilten Hülfsregeln aufzuheben.

Als: $\frac{4}{1}\frac{4}{4}\Big|\frac{2}{7}$; $\frac{2}{1}\frac{4}{6}\Big|\frac{3}{4}$; $\frac{4}{6}\frac{8}{4}\Big|\frac{3}{8}$; $\frac{5}{7}\frac{4}{8}\frac{8}{6}\frac{8}{4}\Big|\frac{6}{9}\frac{8}{8}\frac{6}{3}$; $\frac{2}{3}\frac{4}{0}\Big|\frac{4}{5}$; $\frac{6}{9}\Big|\frac{2}{3}$;
$\frac{8}{9}\frac{1}{0}\Big|\frac{9}{1}\frac{}{0}$; $\frac{2}{3}\frac{5}{5}\Big|\frac{5}{7}$; $\frac{2}{1}\frac{0}{3}\frac{}{5}\Big|\frac{4}{2}\frac{}{7}$.

1. Endigt sich Zähler und Nenner mit Nullen, so streicht von beyden gleichviel weg; was übrig bleibt, ist der neue dem aufgehobenen gleiche Bruch, als: $\frac{5^{\circ}}{100}$ ist gleich $\frac{5\not{0}}{10\not{0}}$, oder $\frac{5}{10}$; ingleichen $\frac{22000}{46000}$ ist gleich $\frac{22}{46}$: denn im ersten Falle ist Zähler und Nenner durch die Wegstreichung der Nullen mit 10, im andern mit 1000 beyde mahle ohne Rest dividirt (C. 3. XIII. 4. ingl. XX.).

2. Falsch wäre $\frac{5^{\circ}}{100}$ in $\frac{5\not{0}}{1\not{0}\not{0}}$ zu verwandeln: denn hier wäre der Zähler durch 10, und der Nenner durch 100 dividirt worden. Es muß aber diese Division durch einerley Zahl geschehen.

XXIII. Manche Brüche lassen sich durch die Einer, oder einfache Zahlen, nicht aufheben. Z. B. $\frac{5}{7}\frac{7}{6}$; indessen kann dies zuweilen durch eine größere Zahl geschehn. So wie hier durch 19 dieser Bruch zu $\frac{3}{4}$ aufgehoben werden kann. Um nun zu einem jeden aus größern Zahlen (jedoch in der Praxi nicht häufig vorkommenden) bestehenden Bruche den aufhebenden Divisor auf eine zuverläßige Art durch einen einzigen Versuch zu finden, verfahre man so:

a) Man dividire mit dem Zähler in den Nenner; den überbleibenden Rest mache man b) zum Divisor, und den erstern Divisor zum Dividendus, und dividire fort. c) Bleibt wieder ein Rest übrig, so wird derselbe wieder Divisor, und der vorige Divisor Dividendus. d) Wenn nun endlich ein solcher Divisor aufgeht, so ist derselbe die Zahl, welche den ganzen Bruch aufhebt.

e) Bleibt

e) Bleibt aber bey fortgesetztem Dividiren eine 1 übrig, so ist Zähler, oder Nenner, oder beyde, sind Primzahlen (Cap. 3. XVIII.), die sich nicht aufheben lassen.

1. Es soll aufgehoben werden $\frac{28}{64}$, also a) $\begin{array}{r|l} 64 & 28 \\ 56 & 2 \\ \hline 8 & \end{array}$

b) $\begin{array}{r|l} 28 & 8 \\ 24 & 3 \\ \hline 4 & \end{array}$ c) $\begin{array}{r|l} 8 & 4 \\ 8 & 2 \\ \hline 0 & \end{array}$, so ist d) 4 als der Divisor, welcher zuletzt keinen Rest übrig läßt, zugleich die Zahl, die den ganzen Bruch aufhebt.

2. Es ist nämlich bey $\frac{28}{64}$ der Nenner gleich dem Zähler + 28 + 8, oder der Nenner ist gleich 28 + 28 + 8, und da 4 die größte in 28 und 8 aufgehende Zahl ist, so muß diese Zahl im Zähler und Nenner die größte aufhebende Zahl seyn. Durch das vorhergehende Verfahren konnte dies erfahren werden, weil auf diese Art der Nenner gegen den Zähler zerlegt und der Unterschied ausfündig gemacht ward, in welchem die Hindernisse, beyde vermittelst einerley Zahl aufzuheben, hätten liegen können.

Jede Zahl, welche die 4 aufhebt, muß diesen Bruch auch aufheben (3. Cap. XXIII. 6.)

3. Es ist aber diese Methode sehr umständlich: wer würde gern die Weitläuftigkeit haben? $\frac{2}{5}\frac{3}{2}\frac{3}{9}\frac{1}{9}$.

$\begin{array}{r|l} 5299 & 2 \\ 4662 & \\ \hline 637 & \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 2331 & 3 \\ 1911 & \\ \hline 420 & \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 637 & 1 \\ 420 & \\ \hline 217 & \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 420 & 1 \\ 217 & \\ \hline 203 & \end{array}$

$\begin{array}{r|l} 217 & 1 \\ 203 & \\ \hline 14 & \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 203 & 14 \\ 14 & \\ \hline 63 & \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 14 & 2 \\ 14 & \\ \hline 0 & \end{array}$, so ist 7 die aufhebende Zahl und

$\begin{array}{r|l} 2331 & 333 \\ 5299 & 757 \end{array}$.

Brüchen einen bestimmten Nenner zu geben.

XXIV. Es kommt bey den Brüchen auf die Größe der Zahlen des Zählers und Nenners in Ansehung des Werthes des Bruchs nicht an, sondern sobald nur in mehrern Brüchen von 1 gleich viel vorhanden ist, so sind die Brüche einander gleich, die Theile mögen heißen, wie sie wollen (VIII.). So ist $\frac{1}{2} = \frac{4}{8} = \frac{50}{100}$ ꝛc.

1. Kann ich daher aus einem gegebenen Bruche einen andern machen, worin von 1 gleichviel Theile enthalten sind, so ist der Werth desselben nicht verändert.

2. Bey dieser Veränderung liegt ein bestimmter neuer Nenner zum Grunde, wornach denn der Zähler eingerichtet werden muß.

3. Soll nun ein Bruch in einen andern von gegebnem Nenner verwandelt werden, so kann der neue Nenner größer, auch kleiner seyn, als der vorhergehende. Im ersten Falle dividirt mit dem vorhandenen Nenner in den neuen und multiplicirt mit dem Quotienten den vorhandenen Zähler. Dies Product ist der neue Zähler.

$\frac{3}{4}$ sollen verwandelt werden in einen Bruch mit 8teln.

4 in 8 = 2; 2 × 3 = 6, so erhält man $\frac{6}{8}$.

4. Durch die Division der 8 mit 4 erfuhr ich, daß $\frac{1}{4}$ von 8 gleich 2 sey, da nun der Zähler 3 sagte, daß ich $\frac{3}{4}$ von 8 haben sollte, so mußte ich 2 mit dem Zähler 3 multipliciren.

5. Ist der neue Nenner ein solcher, worin der vorhandene nicht aufgeht, so wird der neue Zähler zuweilen ein Bruch von gebrochnem Zähler (XII.), als: $\frac{3}{4}$ sollen in 18tel verwandelt werden: 4 in 18 = $4\frac{1}{2}$, multiplicirt mit 3 = $13\frac{1}{2}$, macht $\frac{13\frac{1}{2}}{18}$ (VIII. 3.)

6. Ist der neue Nenner kleiner, als der vorhandene, so dividirt den vorhandenen durch den neuen und durch den Quotienten den vorhandenen Zähler. Der neue Quotient

ist

ist der neue Zähler, als: $\frac{6}{8}$ in 4tel. 8:4 = 2, 6:2 = 3, das ist $\frac{3}{4}$.

7. Denn wenn 8 durch 4 dividirt wird, so finde ich in dem Quotienten 2, daß 1, welches in 8 Theile getheilt war, bey dem neuen Nenner in Theile getheilt werde, die 2 mahl so groß sind, folglich muß der Zähler um 2 mahl kleiner, als vorher werden, das ist, er muß mit 2 dividirt werden. Oder da 4tel die Hälfte von 8tel sind, so durfte ich nur den ganzen Bruch durch diejenige Zahl aufheben, welche aus Achtel, Viertel macht, das ist, die 2, durch welche also Zähler und Nenner dividirt werden mußte, welches hier geschehen ist. (XX.).

8. Entsteht bey der ersten Division ein Bruch, so wird deswegen der neue Zähler noch kein Bruch von gebrochnem Zähler, als: $\frac{9}{18}$ in 4tel. 18:4 = $4\frac{1}{2}$ in 9 = 2, macht $\frac{2}{4}$. Es kann aber auch ein Bruch von gebrochnem Zähler entstehen, als: $\frac{10}{18}$ in 4tel. 18:4 = $4\frac{1}{2}$, in 10 = $2\frac{2}{9}$ macht $\frac{2\frac{2}{9}}{18}$.

9. In jedem (3. 6.) Falle könnt ihr auch so verfahren: multiplicirt den vorhandenen Zähler mit dem neuen Nenner, das Product dividirt mit dem vorhandenen Nenner, der Quotient ist der neue Zähler, so $\frac{3}{4}$ in 8tel, 3 × 8 = 24, dividirt durch 4, macht 6 = $\frac{6}{8}$. Inglei-chen $\frac{6}{8}$ in 4tel. 6 × 4 = 24, dividirt durch 8 = 3, macht $\frac{3}{4}$.

Denn wollte ich annehmen, $\frac{3}{4}$ sind gleich $\frac{3}{8}$, so würde, da sich 4 zu 8 wie 1 zu 2 verhält, der neue Bruch um die Hälfte geringer geworden seyn; multiplicirte ich die 3 mit 8, so würden $\frac{24}{8}$, diesen um die Hälfte zu kleinen Bruch um 8 mahl größer machen, also im Ganzen um 4 mahl zu groß; folglich muß er um 4 mahl kleiner gemacht werden, welches geschieht, wenn der mit 8 multiplicirte Zähler durch den Nenner dividirt wird.

10. Ist es ein gemischter Bruch, so dürft ihr nach angenommener Veränderung nur die ganze Zahl vorsetzen. Als: $1\frac{3}{4}$ in 8tel ist $1\frac{6}{8}$. Soll aber der vermischte Bruch zugleich in einen unächten verwandelt werden (welches hier gewöhnlich der Fall ist), so verwandelt, wie vorher, erst den ächten Bruch in den neuen, und dann macht die ganze Zahl zu einem unächten Bruche und addirt nun seinen Zähler zu dem Zähler des ächten. Denn ist $\frac{3}{4}$ in 8tel verwandelt, gleich $\frac{6}{8}$, so ist $1\frac{3}{4} = 1\frac{6}{8}$ gleich $\frac{14}{8}$; inglei-

chen $2\frac{1}{6}$ sind in 7tel verwandelt, $\frac{2\frac{1}{6}}{7}$, oder unrein $\frac{15\frac{1}{6}}{7}$.

XXV. Der Bruch aus einem Bruche (gebrochne Bruch XI.) kann in einen ordentlichen verwandelt werden: denn $\frac{1}{4}$ aus $\frac{1}{2}$ muß ein ordentlicher Bruch seyn, der kleiner ist, als $\frac{1}{2}$, weil er erst aus $\frac{1}{2}$ gemacht wird, und gleichfalls kleiner als $\frac{1}{4}$, weil er $\frac{1}{4}$ ist, nicht von 1, sondern von $\frac{1}{2}$. Man müßte, um ihn in einen ordentlichen zu verwandeln, $\frac{1}{2}$ in 4 Theile theilen und davon einen Theil nehmen, oder $\frac{1}{2}$ viermahl kleiner machen, oder durch 4 dividiren. Da nun ein Bruch, wenn sein Nenner mit einer ganzen Zahl multiplicirt wird, dadurch mit dieser Zahl dividirt wird (XVIII. 1.), so darf hier also auch nur der Zähler 2 durch 4 multiplicirt werden. Folglich ist $\frac{1}{4}$ aus $\frac{1}{2}$ gleich $\frac{1}{8}$.

1. Wäre der Fall (XI. 1.) da, $\frac{2}{3}$ aus $\frac{3}{4}$, so sollen $\frac{3}{4}$ zwey drittelmahl genommen, oder in 3 Theile getheilt und davon 2 genommen werden. Wären es $\frac{1}{3}$ aus $\frac{3}{4}$, so würde nach voriger Regel $\frac{3}{4}$ mit 3 multiplicirt werden und $\frac{3}{1\,2}$ geben; allein da $\frac{3}{4}$ nicht $\frac{1}{3}$, sondern $\frac{2}{3}$ mahl genommen werden soll, so sieht man, daß man $\frac{3}{1\,2}$ hier 2 mahl nehmen müsse, und folglich $\frac{6}{1\,2}$ erhalten werde. Hieraus folgt, daß bey diesen Brüchen überhaupt Zähler

mit

mit Zähler und Nenner mit Nenner multiplicirt werden müsse, um sie in ordentliche zu verwandeln. $\frac{5}{6}$ aus $\frac{3}{8}$ ist also $\frac{1}{4}\frac{5}{8}$.

2. Ist ein Bruch mit gebrochnem Zähler da (XII.), als: $\frac{1\frac{1}{2}}{4}$, so verwandeln wir den Zähler in einen unächten Bruch $\frac{3}{2}$; weil aber die 1 mit 2 multiplicirt ist, so muß der Nenner auch mit 2 multiplicirt werden, giebt $\frac{3}{8}$, welches gleich $\frac{1\frac{1}{2}}{4}$ ist. Folglich wird bey solchen Brüchen der Zähler in einen unächten, durch den mit ihm verbundenen Nenner verwandelt und durch diesen sein Nenner auch multiplicirt. $\frac{4\frac{1}{2}}{8}$ sind $\frac{9}{16}$; $\frac{\frac{1}{2}}{4}$ ist also $\frac{\frac{2}{2}}{8} = \frac{1}{8}$.

3. Ein Bruch mit gebrochnem Nenner (XIII.) als $\frac{1}{4\frac{1}{4}}$ wird auf ähnliche Art aufgelöst werden. Er ist $= \frac{4}{17}$.

Brüche unter einerley Benennung zu bringen.

XXVI. Sind 2 Brüche vorhanden, welche unter einerley Nenner gebracht werden sollen, so wird beyden ein neuer Nenner (gemeinschaftlicher, oder Generalnenner) gegeben, indem man ihre Nenner mit einander multiplicirt. Zu diesem neuen Nenner bekommt ein jeder noch einen neuen Zähler, indem man jeden Zähler mit dem alten Nenner des andern multiplicirt; das letztere Product giebt den neuen Zähler $\frac{2}{4}$ und $\frac{2}{6}$ sind $\frac{1}{2}\frac{2}{4}$ und $\frac{8}{24}$.

1. Die Nenner müssen auf diese Art gleich werden: denn es giebt einerley Product, wenn 4 mit 6, oder 6 mit 4 multiplicirt wird (3. Cap. XI. 6.).

Weil nun in dem erstern Bruche Nenner und Zähler mit einerley Zahl, hier mit 6, multiplicirt wird, so wird sein Werth nicht verändert; eben so, da Zähler und Nenner des andern mit einerley Zahl, hier mit 4, multiplicirt wird, so wird sein Werth auch nicht verändert.

2. Ist der gemeinschaftliche Nenner noch zu groß, so können zuweilen durch die Division solche Brüche noch aufgehoben werden, und sie bleiben doch von einerley Nenner, hier sind $\frac{1}{2}\frac{2}{4}$ und $\frac{8}{24}$ auch gleich $\frac{3}{6}$ und $\frac{2}{6}$.

3. Sind mehrere Brüche unter einerley Benennung zu bringen, so multiplicirt 1) alle Nenner mit einander, 2) jeden Zähler mit den Nennern der andern Brüche, als: $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$ sind gleich $\frac{20}{40}$, $\frac{30}{40}$, $\frac{16}{40}$.

4. Hier müssen gleichfalls die Nenner einerley Zahl erhalten: denn es ist das Product von $2 \times 4 \times 5$, und $4 \times 5 \times 2$, und $5 \times 2 \times 4$ immer dasselbige $= 40$. (Cap. 3. XI. 7.). Die Brüche selbst bleiben dieselben am Werthe: denn in jedem wird Zähler und Nenner durch einerley Zahl multiplicirt, $\frac{1}{2}$ durch 4×5; ferner $\frac{3}{4}$ durch 2×5 und endlich $\frac{2}{5}$ durch 2×4.

5. Man könnte hier durch Multiplication der sämmtlichen Nenner mit einander den Generalnenner suchen, dann mit dem alten Nenner dividiren, dies Product mit dem Zähler multipliciren; dies gäbe eben das. Denn von dem Generalnenner 40 erhielte ich durch Division mit 2, die Hälfte, 20; und das mit 1 multiplicirt $\frac{20}{40}$, ingleichen mit 4 in 40, 10, als den 4ten Theil, diese 3 mahl genommen $= 30$, gäbe 3 Viertel von dem Generalnenner 40, dies wäre $= \frac{3}{4}$, und so auch mit dem dritten Bruche.

6. Weil aber durch viele, unter einen Nenner gebrachte Brüche stets ein großer gemeinschaftlicher Nenner erwächst, welchen man in Rechnungen nicht gern hat, so ist es bequemer, durch ein anderes Verfahren gleich den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner und den Zähler dazu aufzusuchen. Dies geschieht so: Man setzt die sämmtlichen

Nenner

Nenner über, oder neben einander, und hierauf werden a) diejenigen, welche in größern ganz aufgehn, sämmtlich ausgestrichen. b) Lassen sich nun andre Nenner durch eine in ihnen aufgehende Zahl dividiren, so streicht sie auch aus; aber setzt diese Zahl als Divisor nebst dem Quotienten neben bey, und c) andere Nenner, die sich nicht aufheben lassen, setzt dazu. d) Lassen sich unter diesen neuen Zahlen welche aufheben, oder verkleinern, so macht es ganz wie vorher bey a, b und c. Endlich: e) Sobald sich nichts mehr auf diese Art aufheben läßt, so multiplicirt die vorhandenen Zahlen mit einander. Das Product ist der Generalnenner.

f) In diesen Generalnenner dividiret mit dem alten Nenner, der darin aufgehen muß, (sonst hat man gefehlt) und multiplicirt den Quotienten mit dem alten Zähler, so ist das Product der neue Zähler zu dem Generalnenner. Als: $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$ schreibet:

2		
4	4	
5	5	4 × 5 = 20 der Generalnenner.

20 : 2 = 10 mit 1 multiplicirt = 10 ist der Zähler von $\frac{1}{2}$.
20 : 4 = 5 mit 3 multiplicirt = 15 ist der Zähler von $\frac{3}{4}$.
20 : 5 = 4 mit 4 multiplicirt = 16 ist der Zähler von $\frac{4}{5}$.
So erhalten wir, $\frac{10}{20}$; $\frac{15}{20}$; $\frac{16}{20}$. Ferner, $\frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{2}{10}, \frac{5}{7}$ und $\frac{2}{15}$ sollen unter einerley Benennung gebracht werden. Schreibet:

3	5	
6	6	
10	2	5 × 6 × 7 = 210 Generalnenner.
7	7	
15	3	

Folglich erhalten wir $\frac{140}{210}, \frac{175}{210}, \frac{42}{210}, \frac{150}{210}$.

Hier stellten wir die Nenner 3, 6, 10, 7, 15 über einander. Um nichts zu verwechseln, ward der Strich gemacht, 3 geht in 6 auf, die 3 durchgestrichen (nach a).

(Von

(Von den übrigen gieng nichts mehr in einander auf); allein 5 ist in 10, 2 mahl; in 15, 3 mahl. Darum streicht die 10 aus und setzt hintern Strich 2, streicht die 15 aus und setzt hintern Strich die 3. Den Divisor in 10 und 15, die 5 nämlich, setzt auch hinter den Strich, (nach b). Nun sind die neuen Zahlen 5, 6, 2, 7, 3 da. Damit wird nach a und b verfahren. 2 geht in 6 auf; die 2 durchgestrichen; 3 in 6, die 3 durchgestrichen. Es bleibt übrig 5, 6, 7, womit sich weiter nichts auf diese Art machen läßt. Nun (nach c) multiplicirt sie mit einander, so entsteht der Generalnenner 210. In diesen mit dem alten Nenner des ersten Bruchs dividirt = 70, mit seinem Zähler multiplicirt, = 140. Das ist sein neuer Zähler zum Generalnenner. Mit den andern Brüchen wird der neue Zähler eben so erhalten.

7. In dem erstern Exempel $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$ kann 2 ausgestrichen werden, weil, da hernach mit jedem Nenner, um den Zähler zu finden, dividirt wird, der ausgestrichene Nenner 2 in dem aus 4 ⋊ 5 entstandenen Producte deswegen aufgehn muß, weil er in 4 aufgeht, und wäre 4 ⋊ 5 noch mit 2 multiplicirt worden, so mußte er eben so gut darin aufgehn, als 2 in 2 aufgeht. Uebrigens mußten die Brüche ohngeachtet der Ausstreichung der 2 dieselbigen bleiben, denn ward das Product von 4 ⋊ 5 als der Generalnenner erst durch den alten Nenner 2 dividirt, so erhielt man den halben Generalnenner, und dieser mit dem Zähler 1 multiplicirt, so hatte man den halben Nenner, wie vorhin bey $\frac{1}{2}$. Wäre die 2 nicht weggestrichen, so entstand der Generalnenner 40; ward dieser durch 2 dividirt, so hatte man 20 und mit 1 multiplicirt $\frac{20}{40}$, das wäre auch $\frac{1}{2}$, nur ist $\frac{10}{20}$ bequemer.

In Ansehung der Verringerung der 10 und 15 in dem letzten Exempel, durch 2 und 3 wird das Aufgehn des alten Nenners nicht verhindert, weil die Zahl, die in 10 aufgeht, auch in 2 ⋊ 5 aufgeht, und die in 15, auch

in

in 3×5. Mit dem Zähler ist es, wie vorhin bemerkt worden.

Sollen vermischte Brüche unter einerley Benennung gebracht werden, so werden sie erst zu unächten Brüchen gemacht, ehe man die Veränderung vornimmt. So würden $2\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{5} = \frac{8}{3}$ und $\frac{3}{5} = \frac{40}{15}$ und $\frac{9}{15}$ seyn.

Brüche vermittelst der vier Species zu behandeln.

Addition.

XXVII. Die Zahlen der Brüche werden wie andere Zahlen behandelt, und wir haben daher bishero schon mit Brüchen addirt, subtrahirt ꝛc. (VIII. 3.) Indessen hatten diese Brüche einerley Nenner. Jetzt wollen wir noch das Uebrige, was in Ansehung der vier Species bey den Brüchen zu bemerken ist, nachhohlen.

XXVIII. Sind die Nenner mehrerer zu addirenden Brüche gleich, so hat man blos die Zähler zu addiren. Die Nenner kommen weiter nicht in Betracht, als daß sie den zusammenaddirten Zählern den vorigen Namen geben. $\frac{3}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{6}{8}$.

1. Aus der Addition solcher Brüche kann leicht ein unächter Bruch entstehn. Denn $\frac{3}{5} + \frac{4}{5}$ geben $\frac{7}{5}$ und also mehr, als ein Ganzes, und zwar $1\frac{2}{5}$.

2. Es können durch solche Additionen aus lauter Brüchen mehrere Ganze entstehn, denn $\frac{2}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} + \frac{3}{6} = \frac{14}{6} = 2\frac{2}{6}$.

3. Es können auch vermischte Brüche durch zu ihnen addirte ächte und vermischte Brüche, vergrößert werden, als: $2\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}$ machen $2 + \frac{4}{3}$, $= 3\frac{1}{3}$. Oder $2 + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + 1\frac{2}{4} = 4\frac{2}{4}$.

XXIX. Sind die Nenner ungleich, so können die Zähler keinesweges zusammen addirt werden, den $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$ sind nicht $\frac{5}{3}$ und auch nicht $\frac{5}{4}$, sondern die Nenner müssen erst (XXVI.) unter einerley Benennung gebracht werden. Ist dies geschehen, so werden die dadurch erhaltenen neuen Zähler ordentlich, wie vorhin, addirt.

$1\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$, unter einerley Benennung gebracht, sind $\frac{8}{12}$ und $\frac{9}{12}$, (XXVI.) addirt $\frac{17}{12}$ (XXVII.), geben $1\frac{5}{12}$.

XXX. Bey mehrern Brüchen entsteht, wenn sie unter einerley Benennung gebracht werden, ein großer Nenner, welches bey Rechnungen unangenehm ist. Wird der kleinste gemeinschaftliche (Generalnenner) gesucht, so macht das etwas Mühe (XXVI.). Addiret z. B. $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{2}{10}$, diese

1) Unter einerley Benennung gebracht, geben: $\frac{800}{1600}$, $\frac{960}{1600}$, $\frac{600}{1600}$, $\frac{320}{1600}$. und

2) Die Zähler addirt $\frac{2680}{1600}$, oder $1\frac{1080}{1600}$. Wird hingegen der kleinste Generalnenner gesucht, so wird 1)

4		
5		2
8	8	4
10	10	5

, das ist $5 \times 4 \times 2 = 40$,

als der kleinste Generalnenner, erhalten, woraus wir denn die Brüche $\frac{20}{40}$, $\frac{24}{40}$, $\frac{15}{40}$, $\frac{8}{40}$ finden, und

2) Durch die Addition ihrer Nenner ihre Summe mit $\frac{67}{40}$, oder $1\frac{27}{40}$ bekommen, welche gerade das vorige war.

Der letztere Fall gab den Bruch in kleinern Zahlen, doch konnte der erstere Bruch durch das Aufheben auch dahin gebracht werden: denn

$$\frac{2680}{1600} = \Big|^{2} \frac{1340}{800} = \Big|^{2} \frac{67}{40}.$$

Sub-

Subtraction.

XXXI. Bey gleichen Nennern wird der Zähler des Subtrahendus, als des kleinern Bruchs, von dem Zähler des Minuendus, als des größern, ordentlich abgezogen. Der Rest wird der Zähler und der alte Nenner wiederum der Nenner des Bruchs, welcher die Differenz der beyden ist.

$\frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$; $1\frac{3}{5} - \frac{1}{2}\frac{1}{0} = \frac{2}{2}\frac{}{5}$.

1. Ist ein ächter Bruch von einem vermischten abzuziehn, so bleibt, wenn der ächte im Minuendo größer ist, als der Subtrahendus, die ganze Zahl unverändert $2\frac{4}{6} - \frac{2}{6} = 2\frac{2}{6}$.

Ist der ächte im Minuendus kleiner, so borget 1 von der ganzen Zahl, welches zu dem Bruche addirt, denselben zu einem unächten Bruche macht. $2\frac{1}{3} - \frac{2}{3} = 1\frac{2}{3}$. Ist das Ganze 1, so wird es durch das Borgen aufgehoben, $1\frac{1}{4} - \frac{3}{4} = \frac{2}{4}$.

2. Ist ein vermischter Bruch von einem vermischten abzuziehen, so ziehet erstlich die Brüche und dann die ganzen Zahlen von einander ab, als: $3\frac{2}{4} - 1\frac{1}{5} = 2\frac{1}{5}$, oder $3\frac{3}{8} - 1\frac{5}{8} = 1\frac{6}{8}$.

3. Sind Brüche von ganzen Zahlen abzuziehen, so verwandelt 1 von der ganzen Zahl in einen unächten Bruch von eben dem Nenner, als der Subtrahendus führt, als: $3 - \frac{1}{3} = 2\frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 2\frac{2}{3}$.

4. Ist eine ganze Zahl von einem vermischten Bruche abzuziehen, so laßt den Bruch unverändert und nehmt ordentlich den Abzug bey den ganzen Zahlen vor. In den Rest setzet den Bruch wieder hin, als: $4\frac{2}{3} - 2 = 2\frac{2}{3}$,

oder $\frac{4\frac{2}{3}}{2\frac{2}{3}}$.

5. In allen diesen Fällen kann man auch gleich die vermischten Brüche zu unächten machen, und dann ordentlich

deutlich verfahren. $3\frac{1}{3} - 1\frac{2}{3} = \frac{10}{3} - \frac{5}{3} = \frac{5}{3}$, worauf denn zuletzt zuweilen eine Reduction vorgenommen werden muß, als hier, wo $\frac{5}{3}$ noch zu $1\frac{2}{3}$ zu reduciren war. Dieses alles bedarf keines Beweises.

XXXII. Sind die Nenner ungleich, so bringet vor der Subtraction dieselben erst unter einerley Benennung; dann verfahret, wie vorhin. Von $\frac{4}{5}$ ziehet ab $\frac{3}{4}$. Es ist $\frac{4}{5}$ und $\frac{3}{4} = \frac{16}{20}$ und $\frac{15}{20}$, $16 - 15 = 1$, Rest $\frac{1}{20}$. $3\frac{5}{7} - 2\frac{6}{8}$ ist nach dem vorhin gesagten $2\frac{12}{7} - 2\frac{6}{8}$, das wird $2\frac{96}{56}$ und $2\frac{42}{56}$, abgezogen $\frac{54}{56} = \frac{27}{28}$.

1. Um zu sehen, ob ein Bruch, z. B. $\frac{5}{7}$ größer, oder kleiner, als ein andrer, z. B. $\frac{6}{8}$ sey, kann man nur gleich jeden Zähler mit des andern Nenner multipliciren, So erhielten wir hier 40 und 42, folglich war $\frac{5}{7}$ kleiner, als $\frac{6}{8}$.

2. Wir konnten in dem letztern Exempel auch gleich alles in unächte Brüche verwandeln, als: $3\frac{5}{7} - 2\frac{6}{8}$ waren gleich $\frac{26}{7} - \frac{22}{8} = \frac{208}{56} - \frac{154}{56} = \frac{54}{56} = \frac{27}{28}$ wie vorhin.

Multiplication.

XXXIII. Wird ein Bruch mit einer ganzen Zahl multiplicirt, oder ist der Bruch Multiplicandus, die ganze Zahl Multiplicator, so wird der Zähler mit derselben multiplicirt; das Product ist der neue Zähler und der alte Nenner bleibt.

$\frac{2}{10}$ mit 3 multiplicirt sind $\frac{6}{10}$.
$\frac{5}{20}$ mit 2, sind $\frac{10}{20}$.

Es ist natürlich, daß, wenn ich 2 Theile, der in 10 Theile getheilten 1, 3 mahl nehme, es alsdann 6 Theile werden, die 10tel bleiben müssen.

1. Es kann so leicht, wie bey der Addition, ein unächter Bruch entstehn: denn $\frac{2}{4}$, 4 mahl genommen, sind $\frac{8}{4}$.

XXXIV.

XXXIV. Wird aber ein ächter Bruch mit einem ächten Bruche multiplicirt, so wird Zähler und Nenner verändert. Denn wenn $\frac{2}{4}$ mit $\frac{2}{3}$ multiplicirt wird, so wird $\frac{2}{4}$ dadurch $\frac{2}{3}$ mahl genommen, und folglich $\frac{2}{4}$ in 3 gleiche Theile getheilt, von welchen 2 genommen werden.

1. Daher ist die Multiplication eines solchen Bruchs mit einem andern eine Art von Division. Denn, nehme ich eine Zahl nach einer ganzen Zahl, das ist einige mahl, so wird sie wirklich multiplicirt; nehme ich sie nach einer gebrochenen Zahl, so theile ich sie erst nach dem Nenner des Bruchs und nehme nur von diesen Theilen einen, oder einige.

2. Folglich wird bey einer solchen Multiplication das Product stets kleiner ausfallen, als jeder der Factoren: denn in dem vorigen Exempel wird $\frac{2}{4}$ nicht einmahl ganz, sondern nur $\frac{2}{3}$ mahl genommen, und die $\frac{2}{3}$ sind nicht in dem Producte $\frac{2}{3}$ von 1, sondern von $\frac{2}{4}$, folglich muß das Product kleiner werden, als jeder Factor war.

3. Können wir nun $\frac{2}{4}$ in 3 gleiche Theile theilen und davon 2 nehmen, so haben wir $\frac{2}{4}$ durch $\frac{2}{3}$ multiplicirt.

4. Es werden aber die $\frac{2}{4}$ durch 3 dividirt, wenn der Nenner 4 durch 3 multiplicirt wird, macht $\frac{2}{12}$ (XVIII. 1.), folglich ist $\frac{2}{12}$ der dritte Theil von $\frac{2}{4}$, und da nun dieser dritte Theil 2 mahl soll genommen werden, so darf er nur mit dem Zähler multiplicirt werden, giebt $\frac{4}{12}$.

5. Weil hier also der Nenner des Multiplicandus erst mit dem Nenner des Multiplicators und darauf der Zähler des erstern mit dem Zähler des letztern multiplicirt wird, so darf ich in solchen Fällen nur stets Nenner mit Nenner und Zähler mit Zähler multipliciren, so erhalte ich das verlangte Product. Also $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$ ist $\frac{6}{20}$; und $\frac{2}{8} \times \frac{7}{9}$ ist $\frac{14}{72}$.

6. Der Fall (XI. 1.) $\frac{1}{4}$ aus $\frac{1}{2}$ kann als eine solche Multiplication angesehen werden. Denn $\frac{1}{2}$ wird $\frac{1}{4}$ mahl genommen, folglich darf hier auch nur Zähler mit Zähler

und Nenner mit Nenner multiplicirt werden = $\frac{1}{8}$; $\frac{2}{5}$ aus $\frac{6}{11} = \frac{1}{5}\frac{2}{5}$.

7. Werden vermischte Brüche mit einander multiplicirt, so werden sie erst zu unächten Brüchen gemacht, und darauf wird auf die vorige Art verfahren, aus denselbigen Gründen. $2\frac{1}{2}$ multiplicirt mit $3\frac{1}{3}$ ist $\frac{5}{2} \times \frac{10}{3} = \frac{50}{6} = 8\frac{1}{3}$.

8. Wird eine ganze Zahl mit einem vermischten Bruche multiplicirt, so kann aus dem letztern gleich ein unächter Bruch gemacht werden, und dann wird wie vorhin verfahren. $2\frac{1}{6} \times 3$ ist $\frac{13}{6} \times 3 = \frac{39}{6} = 6\frac{1}{2}$, oder, da dies hier weitläufig ist, $3 \times 2 = 6$, $\frac{1}{6} \times 3 = \frac{3}{6}$ macht $6\frac{1}{2}$.

9. Ist eine kleine ganze Zahl mit einem Bruche zu multipliciren, als $3 \times \frac{1}{10}$, so würde das Product $\frac{30}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$ seyn; bey einer größern Zahl würde das etwas beschwerlicher fallen. Z. B. $264 \times \frac{1}{3}$. Hier könnten wir statt $\frac{792}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{792}{9} = 89$ lieber gleich von 264 den dritten Theil durch die Division suchen = 89. Und sollten wir 264 mit $\frac{2}{3}$ multipliciren, so suchten wir erst von 264, $\frac{1}{3} = 88$ und nähmen das 2 mahl = 176.

10. Es ist einerley, ob ich 3 mit $\frac{2}{4}$, oder $\frac{2}{4}$ mit 3 multiplicire, und es gilt eben so von den gebrochnen, als ganzen Zahlen, daß es gleich viel ist, welchen Factor man als Multiplicandum annimmt (3. Cap. XI. 6.). Denn $\frac{3}{4} \times 3$ sind $\frac{6}{4} = 1\frac{1}{2}$ und $3 \times \frac{12}{4}$ sind $\frac{9}{3} \times \frac{2}{4} = \frac{24}{12} = 1\frac{2}{4}$.

Division.

XXXV. Bey der Division ganzer Zahlen in einander, wo der Dividendus größer, als der Divisor ist, sagt der Quotient, wie oft der letztere in dem erstern enthalten sey (3. Cap. XII.). Ist der Dividendus kleiner, als der Divisor, so giebt der Quotient an, wie viel Theile des Divisoris in dem Dividendo enthalten sind. (4. Cap. VII. 3).

Bey der Division der Brüche unter einander ist es eben so. Ist der Bruch, der Dividendus ist, größer,

als

als der Divisor, so sagt der Quotient, wie oft der Divisor in dem Dividendo stecke. Z. B. $\frac{1}{4}$ steckt in $\frac{3}{4}$ dreymahl, folglich ist 3 der Quotient.

1. Es ist dahero kein Wunder, daß bey der Division eines Bruchs durch einen Bruch der Quotient eine ganze Zahl seyn kann.

2. Ist der Dividendus kleiner, als der Divisor, so ist der Quotient abermahls ein Bruch, und er giebt an, dem wie vielsten Theile nach der Divisor in dem Dividendo enthalten sey. $\frac{1}{4}$ dividirt durch $\frac{2}{4}$ giebt zum Quotienten $\frac{1}{2}$, denn $\frac{2}{4}$ sind in $\frac{1}{4}$ nur nach ihrer Hälfte, oder $\frac{1}{2}$ mahl, enthalten.

XXXVI. Sobald die Nenner gleich sind, dividiret also den bloßen Zähler des Dividendus durch den Zähler des Divisors; der Quotient ist der Quotient der Brüche $\frac{4}{8} : \frac{2}{8} = 2$. Denn $\frac{2}{8}$ stecken in $\frac{4}{8}$, 2 mahl.

1. Hier hat der Nenner weiter auf den Quotienten keinen Einfluß: denn 2 ist in 4, 2 mahl; es mochten nun die Nenner 8tel, oder etwas anderes seyn, wenn sie nur gleich waren.

2. Bleibt nach geschehener Division außer der ganzen Zahl noch ein Rest übrig, so ist er der Zähler des neuen Bruchs, der nun den Quotienten zu einem vermischten Bruch macht, und der Divisor wird sein Nenner. $\frac{8}{12} : \frac{3}{12}$ macht $2\frac{2}{3}$. Es ist $\frac{3}{12}$ in $\frac{8}{12}$ 2 ganze mahl, und $\frac{2}{3}$ mahl enthalten, oder $\frac{3}{12}$ steckt in $\frac{8}{12}$ 2 mahl ganz, und von den $\frac{3}{12}$ sind noch $\frac{2}{12}$ darin enthalten.

3. Hier kann also der alte Nenner keinesweges wieder in den Bruch, der den Quotienten ausmacht, gebracht werden.

4. Ist der Dividendus kleiner, als der Divisor, so würde man blos beyde als 2 Brüche über einander zu setzen haben. Z. B. $\frac{3}{4} : \frac{3}{4}$ ist $\frac{\frac{2}{4}}{\frac{3}{4}}$. Wir werden aber

unten sehen, wie wir bey solchen Divisionen den Quotienten leicht in einem ordentlichen Bruche erhalten.

XXXVII. Sind die Nenner ungleich, so bringet sie erst unter einerley Benennung. $\frac{4}{5} : \frac{2}{3}$ ist $\frac{12}{15} : \frac{10}{15}$ macht $1\frac{2}{10}$. Oder $\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{8}{12} : \frac{9}{12}$ ist $\frac{\frac{8}{12}}{\frac{9}{12}}$, wie vorhin (Nr. 4.) gesagt ist.

Die Gründe sind ganz die vorigen.

1. Es zeigt sich hier, daß die Nenner, wenn nur erst die Brüche unter einerley Benennung gebracht sind, weiter zu der Division nicht erforderlich sind. Daher konnten wir nur gleich jeglichen Zähler durch den Nenner des andern Bruchs multipliciren, welches geschehen mußte, wenn die Brüche unter gleiche Benennung gebracht werden sollten. Dann war die Division vorzunehmen. Auf diese Art hatten wir gleichfalls 4 × 3 und 5 × 2, d. i. 12 mit 10 dividirt, $1\frac{2}{10}$ mit geringerer Mühe.

2. Deswegen darf man nur bey der Division den einen Bruch (welcher es ist, ist einerley) umkehren und den Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliciren, so giebt die erstere Multiplication den Zähler, und die letztere den Nenner des Quotienten. $\frac{4}{5} : \frac{2}{3}$ schreibet $\frac{4}{5} : \frac{3}{2} = \frac{12}{10}$. Ist der Dividendus (wie hier) nun größer, als der Divisor, so macht den unächten Bruch zu einem ächten, so habt ihr den Quotienten ordentlich. Ist der Dividendus kleiner, als der Divisor, so erhaltet ihr gleich den Quotienten als einen ächten Bruch. Z. B. $\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3} : \frac{5}{4} = \frac{10}{12}$.

3. Ist eine ganze Zahl durch einen Bruch zu dividiren, so macht aus derselben einen unächten Bruch, mit gleichem Zähler, als der Divisor hat, und dann dividirt wie vorhin. $2 : \frac{2}{3}$ ist $\frac{6}{3} : \frac{2}{3}$ macht 3.

4. Ist ein vermischter Bruch durch einen Bruch zu dividiren, so macht ihn gleichfalls erst zu einem unächten, und verfahrt denn nach dem bisher gelehrten. $2\frac{1}{2} : \frac{5}{6}$ ist $\frac{5}{2} : \frac{5}{6}$, oder 30 : 10 macht 3.

5. Ist

5. Ist der Divisor auch ein vermischter Bruch, so macht auch ihn erst zu einem unächten, als $3\frac{4}{5} : 2\frac{1}{8}$ ist $\frac{19}{5}$ und $\frac{17}{8}$, oder 152:85, macht $1\frac{67}{85}$.

6. Ist der Divisor größer, als der Dividendus, so ist er nach einem bloßen Bruche darinnen enthalten, und der Quotient ist nur ein bloßer Bruch (Nr. 4.). So wie nun 8 dividirt durch 10 giebt $\frac{8}{10}$, so würde also ohne weitere Procedur der Divisor mit dem Dividendo als ein bloßer Bruch auszudrücken seyn, als $\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}}$ (Nr. 4.).

Will man indessen einen solchen Quotienten in einem ordentlichen Bruche haben, so könnte man sie erst unter einerley Benennung bringen, als $\frac{2}{3} : \frac{3}{4}$ wäre $\frac{8}{12} : \frac{9}{12}$, so wäre daher der Quotient nichts anders als $\frac{8}{9}$.

7. Indessen können wir auch hier gleich den einen Bruch umkehren, und nach XXXVII. 2. verfahren, so erhalten wir aus $\frac{2}{3} : \frac{3}{4}$ gleich $\frac{2}{3} \times \frac{4}{3}$, macht $\frac{8}{9}$.

8. Es kann der Fall kommen, daß ein Bruch durch eine ganze Zahl dividirt werden soll. Z. B. $\frac{3}{4}$ durch 4, d. i. $\frac{3}{4}$ soll $\frac{1}{4}$ mahl genommen werden. Der Quotient muß hier stets ein Bruch werden. Er ist also $\frac{\frac{3}{4}}{4}$, oder $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{16}{4}}$, d. i. $\frac{3}{4} \times \frac{4}{16} = \frac{12}{64} = \frac{3}{16}$. Man erspahrt sich die Mühe, wenn man den Zähler unverändert läßt, den Nenner aber mit der ganzen Zahl multiplicirt. Dies giebt gleich $\frac{3}{16}$. Denn $\frac{3}{4}$ wird hierdurch in 4 Theile getheilt, und $\frac{3}{4}$ mit 4 dividiren heißt doch nichts anders, als $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}$ mahl nehmen.

9. Man merke noch folgende Verfahrungsarten: Wird eine ganze Zahl durch einen vermischten Bruch dividirt, so kann man ihn in einen unächten verwandeln und in die Zahl ordentlich dividiren. Man muß aber zuletzt mit dem Nenner des unächten Bruchs den gefundenen Quotienten multipliciren, so hat man den wahren Quo-

tienten des unächten Bruchs in die ganze Zahl. Z. B. 16 dividirt durch $2\frac{3}{4}$. Saget 16:11, giebt zum Quotienten $1\frac{5}{11}$, multiplicirt mit 4, giebt $5\frac{9}{11}$.

Denn hier ward 11 als ganze Zahl genommen, da es doch nur Viertel sind, es ward also der Divisor um 4 mahl zu groß angenommen, daher mußte auch der Quotient mit 4 multiplicirt werden. (3. Cap. XIII. 7.) Man kann auch gleich die ganze Zahl in Viertel verwandeln und dann ordentlich verfahren, sind $\frac{64}{4} : \frac{11}{4} = 5\frac{9}{11}$ wie vorhin.

10. Ist der Dividendus ein vermischter Bruch und der Divisor eine ganze Zahl, so dividirt mit dieser ganzen Zahl ordentlich in jenen zu einem unächten Bruch gemachten vermischten Bruch, den gefundenen Quotienten müßt ihr aber durch die Zahl dividiren, welche der Nenner des vermischten Bruchs ist.

So $8\frac{1}{2}:2$ wäre $17:2 = 8\frac{1}{2}$; und den Quotienten mit 2, welches hier der Nenner des vermischten Bruchs ist, dividirt, giebt $4\frac{1}{4}$, als den wahren Quotienten.

Denn da der Dividendus hier als 17 ganze Einheiten angenommen wird, da es doch nur halbe sind, so mußte der Quotient durch 2 dividirt werden (3. Cap. XIII. 8.).

$15\frac{1}{4}:12$. Saget 61:12 und den Quotienten mit 4 dividirt $= 1\frac{1}{4}\frac{3}{8}$, oder um die Division in den vermischten Bruch zu vermeiden, so multiplicirt 12 auch mit 4, also $61:48 = 1\frac{1}{4}\frac{3}{8}$, wo also der Quotient unverändert bleiben muß.

11. Sind Divisor und Dividendus Brüche, als: $10\frac{1}{3}:2\frac{1}{4}$, so macht sie zu unächten Brüchen, und dividirt mit den Zählern ordentlich, d. i. $31:9 = 3\frac{4}{9}$; weil nun aber der Quotient 4 mahl zu klein ist (indem die Viertel für ganze Zahlen angenommen würden), so multiplicirt den Quotienten $3\frac{4}{9}$ mit 4, macht $13\frac{7}{9}$; und da der Dividendus als 31 ganze Einheiten betrachtet ward, da es

doch 31 Drittel waren, so dividirt nun $13\frac{7}{9}$ wieder mit 3, macht $4\frac{1}{2}\frac{6}{7}$. Ganz nach vorigen Gründen.

12. Wenn der Dividendus groß genug gegen den Divisor ist, so kann man in solchen Fällen noch anders verfahren. Es wäre $82\frac{1}{3}$ durch $2\frac{2}{4}$ zu dividiren. Saget $2\frac{2}{4}$ sind 10, und $82\frac{1}{3} = 247$. Multipliciret nun gleich 10 mit $3 = 30$. Nun 30 in $247 = 8\frac{7}{30}$ und da wir vorhin 10 Viertel als 10 ganze annahmen, so multiplicirt noch den Quotienten mit 4, macht $32\frac{2}{3}\frac{8}{0}$.

Wir multiplicirten den Divisor hier gleich mit 3, weil wir den Dividendus als 247 ganze angenommen hatten, da es doch nur Drittel waren. Deswegen durfte auch der Quotient hier nicht mit 3 dividirt werden.

Diese Verfahrungsarten werden, wenn gleich einzelne Rechnungsfragen sie nicht leicht im gemeinen Leben veranlassen, doch mit großem Nutzen bey der Regel de Tri angewendet, weil sie zur Abhelfung der gebrochnen Brüche und Beförderung der Kürze gereichen.

Das fünfte Capitel.

Die vier Species in benannten Zahlen.

1. Sobald die Zahlen eine Menge von wirklichen Dingen, oder Größen, bezeichnen, so heißen sie in der Rechenkunst benannte Zahlen, so wie sie, wenn sie, wie bisher geschehen, eine allgemeine Bedeutung haben, unbenannte genannt werden. Bey allen Arten des Rechnens in benannten Zahlen bleiben indessen überhaupt dieselben der Natur der Zahlen und dem decadischen Gesetze gemäßen Veränderungen.

a) Addition.

6 Rthlr.
5 =
11 Rthlr.

b) Subtraction.

20 Gl.
13
7 Gl.

c) Multiplication.

17 Rthlr.
4 mahl
68 Rthlr.

d) Division.

12 Pf. : 60 Pf. | 5 mahl

1. a) 6 Rthlr. und 5 Rthlr. sind 11 Rthlr. b) 20 ggl. davon 13 ggl. abgezogen, bleiben 7 ggr. c) 17 Rthlr. 4 mahl genommen (oder mit 4 multiplicirt) sind 68 Rthlr. d) 12 Pf. lassen sich von 60 Pf. 5 mahl wegnehmen, oder sind darin 5 mahl enthalten.

2. Werden benannte Zahlen unter einander gesetzt, so bedeutet bey einer Zahl das Zeichen = daß diese Zahl die darüberstehende Sache gleichfalls bezeichne; als vorhin bedeutete 6 Rthlr. 5 = so viel, als 6 Rthlr. 5 Rthlr. Unter den Strich wird aber stets das Zeichen noch expres dabey gesetzt:

6 Rthlr.
5 =
11 Rthlr.

3. Da die Bedürfnisse des menschlichen Lebens die Einrichtung nöthig gemacht haben, daß manche Größen, die man einzeln 1 nennt, z. B. 1 Rthlr. 1 lb. 1 Scheffel, u. s. w. wiederum in kleinere Theile zerlegt werden mußten, die man gleich macht, oder doch, ihrem Werthe nach, als gleich annimmt, so muß man bey dieser Art zu rechnen noch auf diese besondere Eintheilung sorgfältige Rücksicht nehmen, und die genaue Befolgung jener allgemeinen Gesetze der Zahlen mit diesen Einrichtungen stets verbinden.

4. Es sind diese Eintheilungen der Eins bey benannten Zahlen bey den mehresten Dingen in den verschiedenen Ländern verschieden. Insonderheit zeigt sich diese Verschiedenheit bey der Eintheilung des Geldes, Getreide-Maaßes u. s. w. daher ein jeder, der mit benannten Zahlen rechnet, auf die festgesetzte Eintheilung derjenigen Art

Größen,

Größen, die er berechnet, wohl Acht zu geben hat, um nicht zu fehlen. Wenn wir in der Folge mit Gelde rechnen werden, so werden wir die Brandenburgische und Sächsische Währung gebrauchen, nach welcher 1 Rthlr. in 24 ggl. und 1 ggl. in 12 Pf. eingetheilt wird; die Eintheilung des 1 Pf. in 2 Heller ist nicht gangbar, und es werden die Theile des Pf. daher lieber in Brüchen ausgedrückt.

5. Die kleinern Theile, worin eine Sache eingetheilt wird, werden wir künftig die geringere Sorte nennen, so ist Loth (Lt.) die geringere Sorte gegen Pfund (℔), Quentchen (Qu.) die geringere gegen Loth beym Gewichte; Groschen (ggl.) sind die geringere gegen Thaler (Rthlr.) u. s. w.

6. 1 Rthlr. ist also ein Ganzes = 1. Daher ist 1 ggl. = $\frac{1}{24}$ von einem Thaler, 1 Pf. = $\frac{1}{12}$ von einem ggl. Welches man kurz $\frac{1}{24}$ Rthlr. $\frac{1}{12}$ ggl. schreibt. Daher wird nun auch 1 Pf. = $\frac{1}{288}$ Rthlr. denn 1 Pf. ist $\frac{1}{12}$ aus $\frac{1}{24}$ Rthlr. (4. Cap. XXV.) = $\frac{1}{288}$ Rthlr. Deswegen ist auch 1 Rthlr. = $\frac{24}{24}$ Rthlr. 1 ggl. = $\frac{12}{12}$ ggl. 1 Pf. = $\frac{2}{2}$ Pf. (4. Cap. VIII.) und 2 Rthlr. = $\frac{48}{24}$ Rthlr.; und 2 Rthlr. 6 ggl. $\frac{54}{24}$ ggl. (4. Cap. IX.).

7. Da man den Zentner in 110 ℔, das ℔ in 32 Lt., das Lt. in 4 Qu. eintheilt, so wird 1 ℔ = $\frac{1}{110}$ Ztn. 1 Lt. = $\frac{1}{32}$ ℔, 1 Qu. = $\frac{1}{4}$ Lt. seyn. Daher ist auch 1 ℔ = $\frac{1}{110}$ Z. und 1 Lt. = $\frac{1}{3520}$ Z. Eben so wird es sich mit den Eintheilungen des Getreidemaaßes und des Maaßes der flüßigen Dinge verhalten. 1 Wispel wird in 24 Scheffel, 1 Scheffel in 2 Himten; 1 Himten in 4 Vierf., 1 Vierf. in 2 Metzen getheilt, und demnach muß ein Scheffel gleich $\frac{1}{24}$ Wispel; 1 Himten = $\frac{1}{48}$ Wispel; 1 Vierf. = $\frac{1}{192}$ Wispel; 1 Metze = $\frac{1}{384}$ Wispel seyn, u. s. w.

8. Es sind dahero die geringern Sorten stets ächte Brüche der größern.

II. Es müssen daher denen, die die vier Species und die Natur der Brüche wohl gefaßt haben, hieraus von selbsten die Arten des Verfahrens sich darbieten, die sie bey dem Rechnen mit benannten Zahlen zu beobachten haben. 13 Pf. können wir daher wohl in einer Rechnung erhalten; aber wir drücken sie so nicht aus, denn so wie $\frac{1}{1}\frac{3}{2}$ ein unächter Bruch ist, den man ohne Noth nicht so ausdrückt, so sind auch 13 Pf. ein unächter Bruch, weil wir nur 12 Pf. auf einen ggl. rechnen, und weil $\frac{1}{1}\frac{3}{2}$ gleich $1\frac{1}{1}\frac{1}{2}$ ist, so sind 13 Pf. = 1 gl. 1 Pf.

III. Weil nun, wenn man unächte Brüche auflöset, dies vermittelst der Division des Nenners in den Zähler geschieht (4. Cap. XV.), so hat man bey dem Rechnen in benannten Zahlen das Dividiren oft nöthig. Ohne also die erhaltenen geringern Sorten als einen Bruch auszudrücken, z. B. $\frac{3}{2}\frac{0}{4}$ Rthlr. so dividirt man gleich mit der Zahl, welche angiebt, wie viel der geringern Sorten in 1 der größern gehe, (oder mit dem eigentlichen Nenner) in die vorhandene Zahl der geringern Sorte, so erhält man die größere. Z. B. in 30 ggl. dividiret mit 24 (als der Zahl, welche angiebt, wie viel ggl. 1 Rthlr. ausmachen, oder den Nenner vom Thaler), so habt ihr den Quotienten 1, der ist der Thaler; 6, die übrig bleiben, sind nichts anders, als 24tel von 1 Rthlr. oder 6 ggl.; 82 ggl. sind 82 dividirt durch 24, gleich 3 Rthlr. 10 ggl. u. s. w.

1. Man nennt sonst dergleichen Verrichtungen das Reduciren, wenn man nämlich die vorhandene größere Zahl einer geringern Sorte in eine kleinere Zahl der größern Sorte verwandelt, jedoch so, daß der Werth bleibt. So heißt, 82 ggl. in 3 Rthlr. 10 ggl. verwandeln, Groschen auf Thaler reduciren ꝛc.

2. Dieses alles beobachtet, kann das Rechnen in benannten Zahlen, keine Schwierigkeit mehr bey sich führen.

Wir

Wir wollen indessen der Vollständigkeit und Uebung wegen noch einige Exempel aus den vier Speciebus hersetzen.

Addition.

IV. Addiret:

4 Rthlr. 20 ggl. 9 Pf.	2 ℔. 26 ℔t. 3 Qu.
1 = 17 = 5 =	1 = 19 = 1 =
6 = 23 = 11 =	4 = 12 = — =
Summa 13 Rthlr. 14 ggl. 1 Pf.	Sma. 8 ℔ 26 ℔t. — Qu.

1. Setzet genau, nicht allein die Dinge gleicher Benennung unter einander, als Rthlr. unter Rthlr.; ggl. unter ggl.; Pf. unter Pf. ꝛc., sondern auch Einer unter Einer, Zehner unter Zehner ꝛc. Z. B. bey den Groschen die 7 Einer genau unter die 0 Einer ꝛc.; den 1 Zehner genau unter die 2 Zehner, und in der Summe eben so. Es nimmt sich übel aus, und erschwert die Durchsicht, wenn man setzet: 15 ggl.

5 =

20 ggl.

2. 9 Pf. 5 Pf. 11 Pf. sind 25 Pf. eigentlich $\frac{2}{1}\frac{5}{2}$ ggl. Setzet die 25 Pf. auf die Seite und, ohne erst sie Bruchmäßig niederzuschreiben, dividirt gleich mit 1 ggl. in die 25 Pf. das ist mit 12 in 25, giebt 2, als die Groschen und 1 Pf. Ueberschuß. Dieser kommt in die Summe unter die Pf. Die 2 ggl. in den Sinn.

Ferner 20 ggl. 17 ggl. 23 ggl. sind 60 ggl. gleich $\frac{6}{2}\frac{0}{4}$ Rthlr. Setzet die 60 ggl. auf die Seite, dividirt mit 1 Rthlr. oder 24 ggl. hinein, giebt 2 Rthlr. und $\frac{1}{2}\frac{2}{4}$ gleich 12 ggl. Zu diesen 12 ggl. addirt die 2 aus den Pfennigen, macht 14 ggl. und diese kommen in der Summe unter die ggl.; 2 Rthlr. in den Sinn.

Endlich 4 Rthlr. 1 Rthlr. 6 Rthlr. sind 11 Rthlr. 2 aus dem Sinne, sind 13 Rthlr. Diese kommen in die

Summe

Summe der Rthlr. So ist die ganze Summe 13 Rthlr. 14 ggl. 1 Pf.

3. Bey solchen Additionen können die Posten die Länge ganzer Folio-Seiten einnehmen. In diesem Falle ist das Irren leicht. Um es zu verhüten (denn man soll im Rechnen nie fehlen), so beobachtet folgendes:

Da schon bey Pfennigen und Groschen Einer und Zehner in den Posten vorkommen, so verfahret bey solchen Posten so:

a) Addiret von oben hinunter zuförderst die Einer und setzt sie auf die Seite hin (noch besser auf ein anderes Blatt Papier); dann die Zehner, und bemerket nun die Summe.

b) Addirt eben diese Posten von unten herauf auf gleiche Art, so müssen die Summen einander gleich seyn.

c) Endlich zählet auch gleich die Zahlen im Ganzen zusammen. Z. B. 20 ggl. 17 ggl. sind 37 ggl. und 23 ggl. sind 60 ggl.

d) Wird dieses von oben sowohl, als unten, vorgenommen, so wird man, wenn zuletzt bey allen diesen vier Versuchen einerley Summe herauskommt, die völlige Gewißheit haben, daß dies die wahre sey.

4. Es giebt auch eine Erleichterung, wenn man in der Mitte der Seite einen Abschnitt macht, und bey demselbigen die Summe zieht. Am Ende der Seite zieht man die Summe des zweyten Abschnitts, und addirt beyde. Die neue Summe ist die Summe der ganzen Seite.

5. In dem zweyten Exempel geben 3 Qu. und 1 Qu. 4., oder $\frac{4}{4}$ Lt., das ist 1 Lt.; folglich konnte in die Summe kein Qu. kommen. 1 Lt. in den Sinn. Ferner 26 Lt. 19 Lt. und 12 geben 57 Lt. 2 aus dem Sinn, 59 Lt., oder $\frac{5}{3}\frac{9}{2}$ ℔, das waren 1 ℔ 27 Lt. Die 27 Lt. in die Summe der Lt., das 1 ℔ in den Sinn. Endlich 2 ℔, 1 ℔, 4 ℔ und das 1 ℔ aus dem Sinne, waren 8 ℔. Daher die ganze Summe 8 ℔ 27 Lt. — Qu.

1	Wispl.	16	Schffl.	1	Himt.	2	Vierf. 1 Metze.
3	=	9	=	—	=	3	= 1 =
Summa 5	Wispl.	2	Schffl.	—	Himt.	2	Vierf. — Metze.

2	Orthoff.	1	Eimer.	1	Anker.	19	Maaß.
1	=	2	=	1	=	36	=
—	=	1	=	—	=	28	=
Summa 4	Orth.	2	Eim.	1	Ank.	33	Maaß.

10	Jahr.	5	Monate.	8	Tage.	3	Stunden.
5	=	9	=	29	=	11	=
Summa 16	Jahr.	3	Mon.	7	Tage.	14	Stunden.

Alles nach obigen Gründen.

Die Subtraction.

V. Setzet, wie bey dem Addiren, die gleichnamigten Größen unter einander. Beym Subtrahiren selbst ist eine ähnliche Rücksicht auf die Sorten und die Eintheilung zu nehmen, daher, wenn von der folgenden Classe 1 geborgt wird, dieses in der niedern Classe nicht 10, sondern so viel gilt, als von der niedern Sorte Theile auf 1 der höhern gehen.

	21	Rthlr.	19	ggl.	5 Pf.
ab	16	=	23	=	2 =
Rest	4	Rthlr.	20	ggl.	3 Pf.

2 Pf. von 5 Pf. lassen zum Rest 3 Pf. Ferner, 23 ggl. von 19 ggl. geht nicht. 1 Rthlr. wird geborgt. Dieser ist gleich 24 ggl. Dazu 19, macht 43, davon abgezogen 23, giebt Rest 20 ggl. Endlich 16 Rthlr. von 20, (denn 1 Rthlr. ist weggeborgt), giebt Rest 4 Rthlr.

1. Weil 1 Rthlr. = $\frac{24}{2}$ Rthlr. und 19 ggl. = $\frac{09}{2}$ Rthlr., so entstanden durch das Borgen $\frac{24}{2}$ Rthlr. + $\frac{09}{2}$ Rthlr. das war $\frac{43}{2}$. Davon $\frac{23}{2}$ Rthlr. abgezogen, geben Rest $\frac{20}{2}$ Rthlr. oder 20 ggl.

2. Hier wird eben, wie bey der Subtraction in unbenannten Zahlen, wenn von einer Größe im Minuendus 1 geborgt ist, dieselbe dadurch um 1 geringer. 21 Rthlr. wurden so 20 Rthlr.

3. Fehlt wo eine Sorte, so muß ebenfalls geborgt werden, und es kommt dann in die Stelle der folgenden ein Ganzes, als:

17	Rthlr.	—	ggl.	4	Pf.
12	=	19	=	2	=
Rest 4	Rthlr.	5	ggl.	2	Pf.

Hier ist kein ggl. folglich wird 1 Rthlr. geborgt. Nun 19 ggl. von 24 ggl.

4. Wäre schon von den ggl. geborgt gewesen, so würde bey den ggl. der Abzug von 23 ggl. geschehen: denn 1 ggl. war an die Pf. weggeborgt, als:

5	Rthlr.	—	ggl.	2	Pf.
1	=	20	=	11	=
Rest 3	Rthlr.	3	ggl.	3	Pf.

5. Auf ähnliche Art im folgenden Exempel:

8	℔	—	℔.	—	Qu.
3	=	16	=	3	=
Rest 4	℔	15	℔.	1	Qu.

Hier wird subtrahirt 3 Qu. von 4 Qu. 16 ℔. von 31 ℔. 3 ℔ von 7 ℔.

6. Deswegen müssen bey solchen Fällen, wenn gleich in dem Minuendo Größen gar nicht vorhanden sind, an deren Stelle bey unbenannten Zahlen Nullen stehen würden, hier doch die Größen, ihrem Namen nach mit dem

Zeichen,

Zeichen, daß sie fehlen, nämlich dem —, angezeigt werden, dafern sie im Subtrahendo vorhanden sind, sonst wäre der Fall fehlerhaft aufgesetzt. Z. B.

4 Rthlr.
2 = 18 ggl. 6 Pf.

1 Rthlr. 5 ggl. 6 Pf. wäre unrichtig aufgesetzt, wenn gleich recht berechnet.

Es muß stehen: 4 Rthlr. — ggl. — Pf.
2 = 18 = 6 =

Rest 1 Rthlr. 5 ggl. 6 Pf.

7. Es kann ein solches Exempel entstehn:

4 Rthlr. — ggl. — Pf.
3 = 23 = 11 =

— Rthlr. — ggl. 1 Pf.

Multiplication.

VI. Eine benannte Zahl kann blos mit einer unbenannten Zahl multiplicirt werden: denn ich kann 1 Rthlr. wohl 2, oder 4 mahl ꝛc. nehmen; aber nicht 2 Thaler, oder 4 Thaler, mahl.

1. Da die Multiplication nichts anders, als eine Addition von einer gewissen Art ist; so giebt es hier keinen Fall, der dem, der die Addition in benannten und unbenannten Zahlen, und die Multiplication in unbenannten recht versteht, unauflösbar sollte bleiben können.

VII. Setzet unter die benannte Zahl die unbenannte, als den eigentlichen Multiplicator, und zwar unter die kleinste Sorte; dann multiplicirt, indem ihr bey der kleinsten Sorte anfanget, als:

4 Rthlr. 6 ggl. 3 Pf.
2 mahl genommen.

Product 8 Rthlr. 12 ggl. 6 Pf.

1. Er-

1. Erwachsen durch die Multiplication aus der niedern Sorte eine, oder mehrere, höhere (als unächte Brüche 4. Cap. XXXIII. 1.), so reducirt sie, und verfahret damit, wie bey der Addition (III. 1.).

Jede von 5 Personen erhält 4 Rthlr. 6 ggl. 3 Pf. Wie viel beträgt das?

4 Rthlr. 6 ggl. 3 Pf.
5 mahl

21 Rthlr. 7 ggl. 3 Pf.

Denn 3 Pf. 5 mahl, sind 15 Pf., das ist $\frac{1}{1}\frac{5}{2}$ ggl., aber 1 ggl. 3 Pf. 1 ggl. in den Sinn, 3 Pf. in das Product. 6 ggl. 5 mahl sind 30 ggl. ($\frac{3}{2}\frac{0}{4}$ Rthlr.), 1 aus dem Sinn, 31 ggl. oder $\frac{3}{2}\frac{1}{4}$ Rthlr., 1 Rthlr. in den Sinn, 7 ggl. in das Product; 4 Rthlr. 5 mahl sind 20 Rthlr. 1 Rthlr. aus dem Sinn, sind 21 Rthlr. in das Product.

2. Es ist nicht unbequem, wenn man bey solchen Multiplicationen erst das ganze Product hinschreibt und hernach die Reduction darunter setzt: denn man kann solche Rechnungen besser nachrechnen. In einem Monat gebraucht Jemand:

12 Rthlr. 18 ggl. 9 Pf., wie viel in 8 Monaten?
8 mahl

96 Rthlr. 144 ggl. 72 Pf. und nun reducirt

102 Rthlr. 6 ggl. — Pf.

3. Ist der eigentliche Multiplicator eine große Zahl, so kann man ihn beym Ausrechnen über den Multiplicandus setzen (3. Cap. X. 6.), als:

3 Rthlr. 6 ggl. 3 Pf. 25 mahl genommen,

25 25 25

schreibet: 3 Rthlr. 6 ggl. 3 Pf.

81 Rthlr. 12 ggl. 3 Pf.: denn es ist in Ansehung des Products einerley, welchen Factor man als Multiplicandus annimmt.

Ein

Ein ℔ Kaffe kostet 9 ggl. 8 Pf., was 9 ℔?

9 ggl. 8 Pf.
9

3 Rthlr. 15 ggl. — Pf.

1 ℔ Farbe kostet 2 Rthlr. 3 ggl. 6 Pf., was 5 ℔?

5

10 Rthlr. 17 ggl. 6 Pf.

Man sieht in manchen Rechenbüchern solche Fälle als Fälle aus der Regel de Tri an, und nennt sie Multiplicationsexempel der Regel-de-Tri, weil dabey blos multiplicirt wird; sie sind aber nichts anders, als hierher gehörende bloße Multiplicationsexempel.

4. Es giebt Fälle, wo es scheint, als ob beyde Factoren unbenannte Zahlen wären, das ist aber nicht möglich, und bey einer rechten Beobachtung zeigt es sich, daß einer eine unbenannte Zahl ist, oder es doch bey dem Gebrauche wird. In 1 Monat nehme ich ein 39 Rthlr. 17 ggl. 5 Pf., was in 1 Jahre? Hier ist ein Jahr zwar eine benannte Zahl, und 12 Monate, die gleich 1 Jahre sind, sind auch eine benannte Zahl. Aber die Sache, worauf es hier ankommt, ist die:

Wenn ich 39 Rthlr. 17 ggl. 5 Pf., 12 mahl nehme, was habe ich dann?

12

476 Rthlr. 17 ggl. — Pf. Product.

5. Hat der Multiplicandus einen Namen und der Multiplicator folglich keinen; so kann ich dem Multiplicator diesen Namen geben, und ihm dem Multiplicando nehmen; dann multipliciren. Das Product hat aber den Namen des Multiplicandi. Als: 4 Rthlr. 2 mahl = 8 Rthlr. Eben das ist 2 Rthlr. 4 mahl = 8 Rthlr.

6. Manche Fragen veranlassen öfters eine kleine Vorrichtung, ehe man die eigentliche Multiplication vor-

nehmen kann, welche Vorrichtung die gesunde Vernunft angiebt, als:

Wie viel Loth enthalten 2 Zentn. 16 Pfund 3 Loth? Verwandelt 1) durch die Multiplication mit 110, die 2 Zent. in Pfunde (denn so oft ich 1 Zentner habe, so oft habe ich 110 Pfund), und addirt 16 Pfund dazu. 2) Verwandelt diese Summe durch die Multiplication mit 32 in Loth (weil, so oft ich 1 Pfund habe, ich auch so oft 32 Loth habe), und addirt die 3 Loth dazu. Diese letztere Summe giebt alles in Lothen.

110 ℔

2

220 + 16, macht 236 ℔

32

macht 7552 Lt. + 3, macht 7555 Lt.

Wie viel Stunden enthalten 3 Jahr?

Die 3 Jahr macht mit 365 zu Tagen, die Tage mit 24 zu Stunden, macht 26280 Stunden.

7. Solche Verrichtungen nennt man resolviren, das heißt auflösen, nämlich in kleinere Sorten, und zwar in solche, die in den größern enthalten sind, als Rthlr. in ggl. auflösen, oder Pfunde in Lothe. Es ist das Gegentheil von Reduciren. (III. 1.).

Wenn 1 Loth Farbe 11 ggl. 7 Pf. kostet, was 1 Pfund 5 Loth?

1 ℔. 5 Lt. sind 37 Lt. Also 11 ggl. 7 Pf. 37 mahl.

Division.

VIII. Bey der Multiplication sage ich, 4, 2 mahl, giebt 8, und bey der Division 4 in 8, 2 mahl. Sie ist also die umgekehrte Multiplication. Und da sie eine Art der Subtraction ist, indem ich 4 von 8 so oft abziehe, als sie in 8 steckt, so wird es also bey der Division mit allen Zahlen stets heißen: Wie oft, oder wie viel-

vielmahl, ist der Divisor im Dividendo enthalten? Dieses beantwortet stets der gefundene Quotient.

IX. Ist der Divisor eine unbenannte, der Dividendus aber eine benannte Zahl, so dividirt mit jener zuerst in die höchste Sorte der benannten und suchet den Quotienten. Bleibt ein Rest übrig, so resolvirt ihn zu der folgenden Sorte, und addirt ihn zu den darinn vorhandenen Zahlen; fahrt so fort, so erhaltet ihr den ganzen Quotienten.

46 Rthlr. 19 ggl. 8 Pf. sollen in 5 gleiche Theile an 5 Personen vertheilt werden. Wie viel bekommt eine jede Person? Das ist: Wie viel ist der fünfte Theil von obiger Summe? Saget a) 5 in 46 Rthlr. b) 5 in 19 ggl. c) 5 in 8 Pf., so geben die Quotienten an, wie viel auf den Theil jeder der 5 Personen kommt.

46 Rthlr.	5 | 9 Rthlr.	19 ggl.	5 | 3 ggl.	8 Pf.	5 | 1 Pf.
45		15		8	
1 Rthlr.		4 ggl.		3 Pf.	
		24 =		24 =	
		43 ggl.	8 ggl.	44 Pf.	8 Pf.
		40 =		40 =	
		3 ggl.		4 Pf.	

Der gesuchte Quotient ist 9 Rthlr. 8 ggl. $8\frac{4}{5}$ Pf.

1. Es heißt hier und kann nicht anders heißen: 5 in 46 Rthlr. 9 mahl. Diese 9 sind hier nichts anders, als 9 Rthlr. Denn man stelle sich vor, es werden von den 46 Rthlr. jedesmahl mit einem Griffe 5 Rthlr., nämlich von jeder Person stets 1 Rthlr., genommen; geschieht dies 9 mahl, so hat eine jede Person 9 mahl 1 Rthlr., das ist 9 Rthlr. Dann sind 45 Rthlr. hinweg. Es widerspricht also der Umstand, daß wir den Quotienten hier; 9 Rthlr. 8 ggl. 8 Pf. ausdrücken, der Erklärung nicht, daß der Divisor in dem Dividendo einigemahle enthalten sey. Denn im Grunde ist der Divisor hier wirklich auch 9 mahl in den Rthlr., 8 mahl in den ggl.

und 8 mahl in den Pf. enthalten, weil eine jede der 5 Personen 1 Rthlr. 9 mahl aus den Rthlr. erhält; 1 ggl. 8 mahl aus den ggl. und 8 Pf. 8 mahl aus den Pf.

2. Die übrig bleibende 1 ist nichts anders, als 1 Rthlr.: denn wenn 45 Rthlr. von 46 Rthlr. weggenommen werden, so bleibet 1 Rthlr. übrig.

3. Wollte man mit einem mahle den ganzen Antheil einer jeden Person ausdrücken, so würde aus dem Reste 1 Rthlr., eine jede noch $\frac{1}{5}$ Rthlr. erhalten: denn er müßte noch in 5 gleiche Theile getheilt werden.

4. Es sind aber noch 19 ggl. da, es ist also weit bequemer, den 1 Rthlr. in ggl. zu resolviren, und die 19 dazu zu addiren und dann wieder in diese mit 5 zu dividiren. Daher 5 in 43 ggl. 8 mahl. Jede der 5 Personen bekommt von den 43 ggl. 1 ggl. 8 mahl, d. i. 8 ggl.

5. Die 3, welche übrig bleiben, sind 3 ggl. Denn, wenn von 43 ggl. 40 weggenommen werden, bleiben 3 ggl. übrig.

6. Es würden also für jede Person noch $\frac{3}{5}$ ggl. übrig seyn. Denn wäre 1 ggl. übrig geblieben, so kam auf jede Person $\frac{1}{5}$ ggl. Folglich so viel Groschen übrig sind, so viel Fünftel von einem Groschen erhält noch eine jede.

7. Da aber hier im Dividendo noch 8 Pf. vorhanden sind, und jede Person noch einige Pfennige erhalten muß, so resolviren wir die 3 ggl. Rest noch in Pfennige, macht 36, und 8 dazu, macht 44 Pf. Hierin mit 5 dividirt, giebt zum Quotienten 8, als 8 Pf. Der Rest ist 4, und da keine geringere Sorte weiter da ist, so erhält eine jede Person noch $\frac{4}{5}$ Pf. Folglich ist der Antheil einer jeden 9 Rthlr. 8 ggl. $8\frac{4}{5}$ Pf.

Wenn 3 Personen 105 ℔ 16 ℔. 3 Qu. von einer Waare erhalten, wie viel bekommt eine jede? Das ist: wie groß ist der dritte Theil von

	105 ℔.	16 ℔.	3 Qu.
Macht	35 ℔.	5 ℔.	$2\frac{1}{3}$ Qu.

Wenn 3 ℔ 6 Lt. 3 Qu. Farbe in 4 Theile getheilt werden sollen, wie viel ist denn der 4te Theil?

Macht 25 Lt. $2\frac{3}{4}$ Qu.

X. Es kann auch bey diesen Exempeln, wie bey der Multiplication, eine kleine Vorrichtung getroffen werden müssen. Z. B. Wie viel Wochen enthalten 876 Tage?

Erwäget 1) Ein Tag ist $\frac{1}{7}$ Woche, folglich 876 Tage sind $\frac{876}{7}$ Wochen, d. i. 876 muß durch 7 dividirt werden, der Quotient giebt die Wochen zu $125\frac{1}{7}$ Wochen, oder 125 Wochen 1 Tag.

Einer hat des Jahrs 568 Rthlr. 16 ggl. zu verzehren, was in einem Monat?

Das wäre: in 12 Monaten werden 568 Rthlr. 16 ggl. verzehrt, was in einem Monat? Hier giebt 568 Rthlr. 16 ggl. durch 12 dividirt das Gesuchte.

161 ℔ Fleisch kosten 14 Rthlr. 17 ggl. was 1 ℔? Dividirt mit 161 in die auf ggl. resolvirten 14 Rthlr. 17 ggl., so giebt der Quotient die Groschen an.

1. Solche, als die beyden vorhergehenden Fälle sind, ziehen manche Rechenbücher zur Regel de Tri, und nennen sie Divisionsexempel der Regel de Tri, weil blos dabey dividirt wird.

XI. Ist der Divisor auch eine benannte Zahl, so läßt sich nicht eher dividiren, bis durch das Resolviren in dem Dividendus und Divisor einerley und zwar die kleinste Sorte, die in beyden statt findet, hervorgebracht ist. Ist das geschehen, so dividirt: der Quotient sagt dann, **wie vielmahl** der Divisor in dem Dividendo steckt.

1. Wenn von 245 Rthlr. 10 ggl. 8 Pf. mehrere Personen, und zwar eine jede 30 Rthlr. 16 ggl. 4 Pf. bekommen sollte, wie viel Personen werden auf dirse Art davon participiren?

a) Resolviret den Divisor und Dividendus zu der kleinsten Sorte, das sind hier Pfennige.

b) Dividirt ordentlich.

c) Der Quotient zeigt, wie vielmahl der Divisor in dem Dividendus steckt, oder wie oft eine Person 30 Rthlr. 16 ggl. 4 Pf. erhalten könne, das ist, wie viel Personen dieses Geld bekommen können.

245 Rthlr. 10 ggl. 8 Pf.	30 Rthlr. 16 ggl. 4 Pf.
resolvirt zu 70688 Pf.	resolvirt zu 8836 Pf.

Quotient 8, d. i. 8 Personen.

2. Es ist also leicht einzusehen, warum hier der Quotient 8 Personen anzeige, ob gleich Divisor und Dividendus Pfennige sind. Denn der Divisor ist 8 mahl im Dividendo enthalten. Da nun der Divisor der Antheil einer Person ist, so ist 8 der Antheil von 8 Personen.

3. Wäre die Frage die: in 1 Monat werden 30 Rthlr. 16 ggl. 4 Pf. verzehrt; wie viel Monate können mit 245 Rthlr. 10 ggl. 8 Pf. bestritten werden? So würde derselbe Quotient 8 hier 8 Monate anzeigen: denn 30 Rthlr. 16 ggl. 4 Pf., als der Antheil von einem Monate ist in dem Dividendus 8 mahl enthalten.

4. Wäre in einer von beyden Zahlen kein Pfennig; aber in den andern wären welche vorhanden, so müßte in der erstern die Resolution in Pfennigen doch vorgenommen werden, als:

Wie viel Personen können von 646 Rthlr. 22 ggl. in gleichen Theilen jede 80 Rthlr. 20 ggl. 9 Pf. erhalten?

Hier müßt ihr den Dividendus auch in Pfennige resolviren, weil im Divisor Pfennige sind — macht 8 Personen.

Ein Buchdrucker hat an Papier vorräthig 21 Ballen, 1 Rieß. Er gebraucht zu einer Schrift 2 Ballen und 22 Buch. Den wie vielsten Theil von jenem Vorrathe wird diese Schrift wegnehmen?

Resolvirt hier alles zu Buch Papier.

21 Ballen 1 Rieß sind 4220 Buch.

2 Ballen — = 22 Buch sind 422 Buch.

Der Quotient ist 10; d. h. seine Schrift ist in dem Vorrathe zehnmahl enthalten, folglich erfodert sie von dem Papiervorrathe $\frac{1}{10}$.

Es kosten 24 Quadersteine 16 ggl. was ein solcher Stein?

Hier müßtet ihr mit 24 in 16 ggl. dividiren. Das geht nicht. 16 ggl. sind aber gleich 16 × 12 als Pf. macht 192 Pf. dividirt mit 24, = 8 Pf.

Von den Proben der Species in benannten Zahlen unten (Cap. 8.).

Das sechste Capitel.

Brüche in benannten Zahlen.

I. Sobald eine wirkliche Größe, welche 1 heißt, in völlig gleiche Theile zerlegt wird, von denen einer, oder mehrere (aber nicht alle) genommen werden, so entsteht ein Bruch in einer benannten Zahl. Z. B. Wird ein Apfel in drey völlig gleiche Theile geschnitten, so ist ein solcher Theil $\frac{1}{3}$ Apfel.

1. Schreibet den Namen des Bruchs stets Rechts gegen Zähler und Nenner, wie hier und bereits (Cap. 5. I. 6.) geschehen ist.

2. Man theilt aber im gemeinen Leben manche Arten des Ganzen in gewisse Theile ein, die man nur in einer gewissen Hinsicht gleich macht, oder dafür annimmt. Z. B. 1 Rthlr. besteht aus 24 ggl., welche 24tel eines Thalers für völlig gleich am Werthe angenommen werden, wenn gleich 1 ggl. zuweilen etwas weniges größer, oder leichter, als ein anderer, ist.

3. Beym Gewichte sind die niedern Sorten, die hier auch Brüche der höhern sind (5. Cap.), einander am

Gewichte völlig gleich, z. B. ein Loth, als $\frac{1}{32}$ ℔ ist jedem andern Lothe (in einem und eben demselben Lande) am Gewichte völlig gleich, wenn es gleich sonst an Metall und Form verschieden ist. Solche benannte Brüche werden also durch Willkühr und Convention erst völlig wirkliche Brüche.

4. Sobald man sich Brüche in benannten Zahlen gedenkt, z. B. $\frac{2}{4}$ Rthlr., so denkt man zuvörderst an keine Untersorten, sondern sieht 1 Rthlr. als etwas Gebrochenes an, wo 1 in 4 Theile getheilt ist, ob man gleich ihn im gemeinen Leben so nicht eintheilt. Deswegen rechnet man bey den Brüchen in benannten Zahlen genau nach den Grundsätzen des Rechnens bey den Brüchen in Unbenannten.

5. Die Größe dieser Brüche gegen einander ist völlig nach Cap. 4. VIII. zu schätzen. $\frac{2}{3}$ Rthlr. ist ein größrer Bruch, als $\frac{1}{3}$ Rthlr. Gleichfalls ist $\frac{1}{3}$ Zt. mehr als $\frac{120}{240}$ Zt. So ist auch $\frac{4}{4}$ ℔ = 1 ℔; $\frac{60}{60}$ Zt. = 1 Zt.

6. Unächte Brüche giebt es eben so bey benannten, wie bey den unbenannten Brüchen (Cap. 4. IX.) $\frac{4}{3}$ Rthlr. $\frac{13}{11}$ ggl. $\frac{9}{4}$ Lt. Eben so vermischte $1\frac{4}{5}$ Rthlr. $7\frac{8}{13}$ Lt. (X). Die unächten benannten werden eben so resolvirt, als die unbenannten (XV.). $\frac{4}{3}$ Rthlr. sind $1\frac{1}{3}$ Rthlr.; $\frac{13}{11}$ ggl. = $1\frac{2}{11}$ ggl. $\frac{9}{4}$ Lt. = $2\frac{1}{4}$ Lt. $\frac{12}{4}$ Elle sind = 3 Ellen. Die vermischten Brüche werden in unächte verwandelt nach XVI. $1\frac{1}{3}$ Rthlr. sind $\frac{4}{3}$ Rthlr.; $1\frac{2}{13}$ ggl. = $\frac{15}{13}$ ggl.; $4\frac{6}{8}$ Zt. sind = $\frac{38}{8}$ Zt. u. s. f.

7. Gebrochene Brüche sind hier, z. B. $\frac{2}{3}$ von $\frac{1}{4}$ Rthlr. $\frac{5}{8}$ von $\frac{1}{2}$ Zt.; $\frac{2}{6}$ von $\frac{3}{4}$ ℔. dergleichen Brüche nicht selten im Handel und Wandel, vorzüglich bey Theilungen, und Auseinandersetzungen vorkommen. Unten 13. 2c.

8. Die Aufhebung der benannten Brüche ist dieselbige, als der unbenannten. $\frac{4}{12}$ Rthlr. sind = $\frac{1}{3}$ Rthlr., denn 4 in 4, 1 mahl; 4 in 12, 3 mahl. Da nun, wenn 1 in 12 Theile getheilt ist, 4 dieser Theile so viel von 1 in

sich

sich fassen, als 1 Theil, wenn 1 in 3 Theile getheilt ist, von 1 in sich faßt, so müssen auch 4 Theile von dem in 12 Theile getheilten 1 Rthlr. so viel von demselben enthalten, als 1 Theil von dem in 3 Theile getheilten 1 Rthlr. Es sind daher auch $\frac{4}{12}$ Rthlr. = 8 ggl., so wie $\frac{1}{3}$ Rthlr. = 8 ggl. ist.

9. Diese Aufhebung von Brüchen in benannten Zahlen ist eine alltägliche Verrichtung beym Rechnen.

Es läßt sich der Bruch $\frac{3}{6}\frac{5}{3}$ Rthlr. nicht gut geschwind übersehen; aufgehoben ist er $\frac{5}{9}$ Rthlr. So $\frac{1}{2}\frac{7}{3}\frac{4}{2}$ Zt. ist schwüriger zu schätzen, als $\frac{6}{8}$ Zt., oder $\frac{3}{4}$ Zt. Daher hier die Aufhebung nöthig ist.

10. Zu gleichen Namen müssen Brüche in Rechnungen häufig gebracht werden, indem theils bey der Addition der Brüche von ungleichen Nennern, theils bey dem Schlusse mancher Exempel und Rechnungen Brüche auf diese Art einerley Namen erhalten müssen. $\frac{2}{3}$ Rthlr. und $\frac{3}{4}$ Rthlr. sind $\frac{8}{12}$ Rthlr. und $\frac{9}{12}$ Rthlr. das ist 16 ggl. und 18 ggl.; so wie $\frac{2}{3}$ Rthlr. 16 ggl. und $\frac{3}{4}$ Rthlr. 18 ggl. war. $\frac{5}{6}$ Zt. und $\frac{7}{8}$ Zt. sind $\frac{40}{48}$ Zt. und $\frac{42}{48}$ Zt. (XXVI.), welche hier noch in $\frac{20}{24}$ Zt. und $\frac{21}{24}$ Zt. aufgehoben werden können (XXVI. 2.).

11. Sehr oft trägt es sich beym Rechnen zu, daß ein benannter Bruch von einer Sache, bey der es noch niedrigere Sorten giebt, in einer solchen Sorte ausgedrückt werden muß. Z. B. Wie viel sind $\frac{2}{6}$ Rthlr.? Dies ist der Fall (XXIV.), wo man einen Bruch in einen andern von bestimmten, oder angegebenen, Nenner verwandeln soll, und man verfährt alsdann nach allen den Regeln §. XXIV.

Denn bey $\frac{2}{6}$ Rthlr. soll ich hier sagen, wie viel es Groschen sind, weil ggl. die geringere Sorte von Rthlr. sind. Da nun 1 ggl. = $\frac{1}{24}$ Rthlr. ist, so soll ich angeben, wie viel $\frac{2}{6}$ Rthlr. nun 24stel Rthlr. sind. Der neue Nenner heißt also 24stel. Nach jenen Regeln sind es $\frac{8}{24}$ Rthlr. d. i. ohne Bruch 8 ggl.

$\frac{15}{19}$ Rthlr. wie viel ggl.? Das ist, wie viel 24stel Rthlr.? $= 18\frac{18}{19}$ ggl.

Hier bleibt bey den 18 ggl. noch der Bruch $\frac{18}{19}$ welches ein Bruch von 1 ggl. ist, oder von $\frac{1}{24}$stel Rthlr. Denn wir haben 24stel mit 15 multiplicirt und mit 19 dividirt. Darum ist der bey dieser Division entstehende Rest ein Bruch von dem, was $\frac{1}{24}$ war, also von 1 ggl. Es würden auch, wenn noch 1 im Dividendo mehr wäre, alsdenn $\frac{19}{19}$ noch 1 ggl. mehr gegeben, und wir also 19 ggl. im Quotienten erhalten haben. Nun theilen wir aber 1 ggl. noch in 12 Pf. ein, daher lassen sich auch $\frac{18}{19}$ noch in der niedern Sorte, als Pfennige, ohne Bruch, ausdrücken: da nämlich 1 Pf. $= \frac{1}{12}$ ggl. ist, so sind $\frac{18}{19}$ ggl. $= \frac{11}{12} + \frac{7}{12}$, oder $11\frac{7}{19}$ Pf. Es ist nicht gebräuchlich, die Theile des Pfennigs in kleinern Sorten auszudrücken, daher bleibt der letztere Bruch so stehen.

Sollten wir $\frac{8}{38}$ Rthlr. in niedern Sorten angeben, so erhielten wir $5\frac{2}{38}$ ggl. Nun geben $\frac{2}{38}$ ggl. noch keinen Pfennig, folglich mußten wir es hier bey diesem Ausdrucke bewenden lassen. Gesetzt aber wir hätten in einer Rechnung den Fall, der sich zutragen kann, daß $\frac{8}{38}$ Rthlr. in niedrige Sorten resolvirt, und zu Posten addirt werden sollten, worinnen sich bereits Thaler, Groschen, Pfennige befänden, so könnten wir keinesweges den Bruch in den Posten der Groschen mit ansetzen. Wir würden daher in den Posten der Groschen die 5 ggl. setzen, und die $\frac{2}{38}$ ggl. als einen Bruch in Pfennige in den Posten der Pfennige bringen. $\frac{2}{38}$ ggl. in Pfennige verwandelt, heißt 2 mit 12 multipliciren $= 24$ und durch 38 dividiren, wäre gleich $\frac{24}{38}$ Pf. $= \frac{12}{19}$ Pf. Hätten wir also z. B.

3 Rthlr.	8 ggl.	7 Pf.	dazu addirt $\frac{8}{38}$ Rthlr.	
stünden — =	5 =	$-\frac{12}{19}$ =		
Summa 3 Rthlr.	13 ggl.	$7\frac{12}{19}$ Pf.		

Wie

Wie viel ist $\frac{1}{13}$ ggl.? Dies ist kein Pfennig. Also 1 ✕ 12 = 12; dividirt durch 13 = $1\frac{2}{3}$ Pf.

$\frac{1}{8}\frac{7}{4}$ Wispel Rocken, wie viel Scheffel, Himpten, Vierfaß, Metzen? = 4 Scheffel, 1 Himpten, 2 Vierfaß, $1\frac{5}{6}$ Metze.

Hier geben 17 ✕ 24 (weil 1 Wispel = 24 Scheffel) und durch 84 dividirt, $4\frac{7}{8}\frac{2}{4}$ Scheffel. Ferner 72 ✕ 2 (weil 2 Himpten = 1 Scheffel) und durch 84 dividirt, geben $1\frac{6}{8}\frac{0}{4}$ Himpten. Darauf 60 ✕ 4 (weil 4 Vierfaß = 1 Himpten) und durch 84 dividirt, geben $2\frac{7}{8}\frac{2}{4}$ Vierfaß; endlich 72 ✕ 2 (weil 2 Metzen = 1 Vierfaß), geben $1\frac{6}{7}\frac{0}{2}$ Metze = $1\frac{5}{6}$ Metze.

Es kann sich zutragen, daß ein Bruch in benannten Zahlen nicht in die nächste kleinere Sorte gebracht werden kann, weil er zu klein ist. Z. B. $\frac{3}{3}\frac{3}{5}\frac{}{0}$ Zt., welches noch kein ℔ ist. Bringt ihn also zur Sorte der Loth, $\frac{3}{3}\frac{3}{5}\frac{}{0}$ Zt. ist = $\frac{3}{3}\frac{3}{5}\frac{0}{0}$ ℔, also $30\frac{6}{35}$ Lt. (denn $\frac{3}{3}\frac{3}{5}\frac{}{0}$ Zt. = $\frac{3}{3}\frac{3}{5}\frac{0}{0}$ ℔, das ist $30\frac{6}{35}$ Lt.).

12. Sind benannte Brüche zu addiren, so setzet 1) Brüche unter Brüche. Sind Ganze dabey, so setzet sie vor den Brüchen. 2) Addirt dann die Brüche, und entstehen hieraus Ganze, so nehmt sie in den Sinn. 3) Addirt die Ganzen, und addirt das, was in dem Sinn ist, dazu, so erhaltet ihr die Summe in den Ganzen nebst einem Bruche.

$$\begin{array}{r} 1\frac{1}{4}\text{ Rthlr.} \\ 2\frac{3}{4}\quad " \\ -\frac{2}{4}\quad " \\ \hline 4\frac{2}{4}\text{ Rthlr.} \end{array}$$

Es müssen diese Brüche durchaus Brüche von einerley Ganzen, der Art nach, seyn. Z. B. $\frac{2}{3}$ Rthlr. und $\frac{1}{4}$ ggl. können auf diese Art nicht addirt werden.

Man hebt beym Niederschreiben solche Brüche gleich auf, wenn sie sich ohne viele Umstände zu einerley Nenner bringen lassen. Als: $\frac{1}{2}$ Rthlr. $\frac{1}{4}$ Rthlr. $\frac{6}{8}$ Rthlr. Dafür setzet gleich $\frac{2}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, macht $\frac{6}{4}$ = $1\frac{1}{2}$ Rthlr.

Muß

Muß aber ein gemeinschaftlicher Nenner gesucht werden, so verfahrt, wie oben gesagt (Cap. 4. XXVI.). Als: $\frac{1}{2}$ ℔, $\frac{5}{12}$ ℔, $\frac{2}{9}$ ℔, sind $\frac{18}{36}$ ℔, $\frac{15}{36}$ ℔, $\frac{8}{36}$ ℔, Summa $\frac{41}{36} = 1\frac{5}{36}$ ℔.

Im Handel und gemeinen Leben kommen viele solche Additionen nicht leicht vor. Man bringet in Rechnungen diese Brüche lieber erst in niedrigere Sorten. Statt $3\frac{4}{16}$ Rthlr. setzt man lieber gleich 3 Rthlr. 4 ggl. 6 Pf. Und ließe sich der Bruch nicht ganz in Sorten auflösen, so wirft man lieber, wenn man die Umstände scheuet, eine Kleinigkeit weg. Als $2\frac{2}{31}$ ℔, wäre anzusetzen 2 ℔ 12 Lt. 2 Qu. statt 2 ℔, 2 Lt. $1\frac{7}{31}$ Qu., wenn es nämlich nicht auf die genaueste Strenge ankommt; bey öffentlichen Rechnungen aber, oder, wo es auf die größte Strenge ankommt, verfährt man lieber, wie vorhin gelehrt ist, weil sonst wider die Richtigkeit Bemerkungen gemacht werden könnten.

13. Wird subtrahirt, so werden dieselben Regeln befolgt, wie bey der Subtraction mit benannten Zahlen.

Als: Eingenommen sind $10\frac{5}{6}$ Rthlr.
Ausgegeben = $8\frac{3}{6}$ =

Rest $2\frac{2}{6}$ Rthlr.

Gekauft sind $12\frac{2}{3}$ ℔ Vorräthig waren $85\frac{1}{4}$ Elle
Verbraucht = $3\frac{1}{4}$ = Abgemessen $20\frac{4}{8}$ Ellen

Rest $9\frac{5}{12}$ ℔ Rest $64\frac{3}{4}$ Ellen

Sollte, wie wohl zu geschehen pflegt, der Fall eintreten = = $12\frac{1}{2}$ Zt. $13\frac{1}{6}$ ℔.
ab $8\frac{1}{4}$ Zt. $19\frac{1}{4}$ =

so ist Rest 4 Zt. $21\frac{5}{12}$ ℔.

Es wird nämlich zu den 13 ℔ hier am bequemsten noch $\frac{1}{4}$ Zt. geborgt, macht $27\frac{1}{2}$ ℔, addirt zu den 13 ℔, macht $40\frac{1}{2}$ ℔, ab 19 ℔, gäbe Rest $21\frac{1}{2}$ ℔. Zu dem $\frac{1}{2}$ ℔ noch $\frac{1}{6}$ ℔, giebt $\frac{8}{12}$ ℔ $= \frac{2}{3}$ ℔, davon $\frac{1}{4}$ ℔ ab,

ist

ist $\frac{5}{12}$ ℔. Also in den Rest $21\frac{5}{12}$ ℔. Ferner in dem ersten Satze $\frac{1}{4}$ Zt. von $\frac{1}{4}$ Zt. (denn $\frac{1}{4}$ ist weggeborgt) geht auf. 8 Zt. von 12 Zt. Rest 4 Zt.

14. Bey der Multiplication der benannten Brüche verfahret ganz, wie bey den Unbenannten (4. Cap. XXXIII.).

Beyde Factoren können nicht benannt seyn. Ich kann nicht $\frac{2}{3}$ Ellen $\frac{1}{4}$ Ellen mahl, wohl aber $\frac{1}{4}$ mahl nehmen.

Brüche mit ganzen Zahlen, oder ganze Zahlen mit Brüchen:

Was kosten 6 ℔ Zucker à ℔ $\frac{5}{12}$ Rthlr.?

$\frac{5}{12} \times 6 = \frac{30}{12}$ Rthlr. $= 2\frac{1}{2}$ Rthlr.

Hier scheint es, als würden $\frac{5}{12}$ Rthlr. mit 6 ℔ multiplicirt; sie werden aber nur 6 mahl genommen.

Was kosten 9 Ellen Leinwand à $\frac{5}{8}$ Rthlr.?

$\frac{5}{8}$ Rthlr. 9 mahl $= \frac{45}{8}$ Rthlr. $= 5\frac{5}{8}$ Rthlr.

$\frac{4}{5}$ Wispel werden 5 mahl genommen, wie viel ist es?

macht $\frac{20}{5} = 3\frac{1}{3}$ Wispel.

Brüche mit Brüchen. Wie viel sind $\frac{5}{6}$ ℔ $\frac{3}{4}$ mahl genommen? Es sollen von $\frac{5}{6}$ ℔ Farbe $\frac{3}{4}$ genommen werden $\frac{5}{6}$ ℔ $\times \frac{3}{4} = \frac{15}{24}$ ℔ $= 20$ Lt.

Wie viel sind $\frac{2}{8}$ von $\frac{5}{6}$ Rthlr.? Macht $\frac{10}{48}$ Rthlr. $= \frac{5}{24}$ Rthlr. $= 5$ ggl. Was ist $\frac{1}{9}$ von $\frac{17}{8}$ Zt? Macht $\frac{17}{72} = 3$ ℔ 1 Lt. $3\frac{12}{53}$ Qu.

Bey diesen Multiplicationen muß das Product gleichfalls kleiner, als jeder der Factoren werden (4. Capitel. XXXIV. 2.).

Ganze mit vermischten Brüchen, oder vermischte Brüche mit Ganzen.

Drey Personen erhalten jede $2\frac{1}{4}$ Scheffel. Wie viel alle drey? Macht $6\frac{3}{4}$ Scheffel.

$2\frac{3}{8}$ ℔ 5 mahl genommen, was beträgts?

$10\frac{15}{8}$ ℔ $= 11\frac{7}{8}$ ℔.

21 ℔ à $3\frac{3}{4}$ Rthlr.? Saget: 21

3

63 Rthlr.

$15\frac{3}{4}$ =

macht $78\frac{3}{4}$ Rthlr.

In diesem Falle könnet ihr, statt von 21 den vierten Theil, und diesen hernach dreymahl zu nehmen, gleich von dem dreymahl genommenen 21, d. i. 63, den vierten Theil einmahl nehmen, $15\frac{3}{4}$ Rthlr. Wäre es gewesen:

21 ℔ à $3\frac{5}{8}$ so setzet:

3

63 Rthlr.

10 = 12 ggl.

2 = 15 =

76 Rthlr. 3 ggl.

Denn $\frac{5}{8}$ sind $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{8}$; und da 63 hier 21 dreymahl genommen ist, so wird mit 6 in 63 dividirt, gab 10 Rthlr. 12 ggl. Nun den 8ten Theil von 21 Rthlr, gab 2 Rthlr. 15 ggl.

Doch konntet ihr auch sagen:

21 ℔

3

63 Rthlr.

10 = 12 ggl. (= 21, $\frac{1}{2}$ mahl)

2 = 15 = (= 21, $\frac{1}{8}$ mahl)

76 Rthlr. 3 ggl.

Vermischte Brüche mit ächten, oder vermischten. $2\frac{2}{6}$ Lt. $\frac{5}{8}$ mahl genommen. Ist $\frac{14}{6}$ Lt. × $\frac{5}{8}$ = $\frac{70}{48}$ Lt. = $1\frac{24}{48}$ Lt. = 1 Lt. $1\frac{24}{48}$ Qu.

$3\frac{1}{12}$ Zentner soll $2\frac{7}{8}$ mahl genommen werden. Macht $\frac{37}{12}$ Zt. × $\frac{23}{8}$ = $\frac{851}{96}$ Zt. = 8 Zt. 95 ℔ 3 Lt. $1\frac{21}{48}$ Qu.

Man muß nur diesen und ähnliche Fälle nicht verwechseln mit $2\frac{7}{8}$ Zt. von $3\frac{1}{12}$ Zt. Das wäre blos Subtraction.

15. Di-

15. Division. Aechte Brüche in Aechte.

a) Der Dividendus ist größer, als der Divisor.

Von $\frac{5}{6}$ Rthlr. sollen mehrere Personen, jede $\frac{2}{12}$ Rthlr., erhalten: wie viel können davon bekommen?

$\frac{5}{6}$ Rthlr. : $\frac{2}{12}$ Rthlr. $= \frac{5}{6} \times \frac{12}{2} = \frac{60}{12} = 5$, das ist, 5 Personen.

Von $\frac{1}{2}$ Zentner Farbe wird $\frac{1}{20}$ Zentner genommen, wie oft? $\frac{1}{2}$ Znt. : $\frac{1}{20}$ Znt. $= \frac{1}{2} \times \frac{20}{1} = \frac{20}{2} = 10$ mahl.

b) Der Divisor ist größer, als der Dividendus.

$\frac{6}{12}$ Rthlr. wie oft in $\frac{1}{3}$ Rthlr.? Das ist:

$\frac{1}{3} : \frac{6}{12} = \frac{1}{3} \times \frac{12}{6} = \frac{12}{18}$ Rthlr. $= \frac{2}{3}$ mahl.

Wenn nun $\frac{1}{3}$ Rthlr. $=$ 8 ggl. und $\frac{6}{12}$ Rthlr. $=$ 12 ggl. so ist auch 8 ggl. in 12 ggl. $\frac{2}{3}$ mahl enthalten.

Eine ganze Zahl durch einen Bruch. Wie oft kann ich $\frac{4}{12}$ Rthlr. von 8 Rthlr. nehmen? Das ist,

$8 : \frac{4}{12} = \frac{96}{12} : \frac{4}{12} = 24$ mahl.

Und $\frac{4}{12}$ Rthlr. $=$ 8 ggl. sind auch in 8 Rthlr. 24 mahl enthalten.

Ein Bruch durch eine ganze Zahl. Der wievielste Theil ist 2 Rthlr. von $\frac{5}{6}$ Rthlr.? $= \frac{5}{6}$ Rthlr. : 2 Rthlr. $= \frac{5}{12}$ mahl. Und 20 ggl. ist von 48 ggl. $= \frac{5}{12}$.

Vermischte Brüche durch ächte und vermischte. $\frac{3}{4}$ Ellen in $6\frac{3}{8}$ Ellen, wie oft?

$= 6\frac{3}{8} : \frac{3}{4} = \frac{51}{8} : \frac{3}{4} = \frac{51}{8} \times \frac{4}{3} = \frac{204}{24}$ Ellen $= 8\frac{1}{2}$ mahl.

Oder wie oft stecken $3\frac{1}{4}$ Ellen in $30\frac{2}{3}$ Ellen? $9\frac{17}{39}$ mahl.

Solche Brüche können, wenn gleich nicht gewöhnlich im gemeinen Leben, doch bald auf diese, bald jene, Art in Rechnungen vorkommen. Man muß daher mit solchen Fällen bekannt seyn, um sich stets helfen zu können.

Das siebente Capitel.

Einige gangbare Arten von Abkürzungen und Vortheilen, welche sich bey den bisher gelehrten Formeln zu rechnen anbringen lassen.

Addition.

I. Stellt euch vor, daß die ersten 10 Zahlen durch die Addition auf mannigfaltige Art zusammengesetzt sind.

1. Als die 5 ist gleich 3 + 2; 6 = 3 + 3. 10 = 5 + 5. So kann man sich gewöhnen, im Kopfe geschwind zu addiren. Als 32 und 5 ist = 32 + 3 ist 35 + 2 ist 37, welches besser ist, als 5 zu 32 einzeln zu zu zählen.

2. So kann man auch annehmen, als ob durch die Subtraction eine kleinere Zahl aus einer größern entstanden wäre. Z. B. 7 = 10 — 3; 8 = 10 — 2; 9 = 10 — 1. Also 38 + 7 wäre 48 — 3 = 45, welches sich eher finden läßt, als wenn man zu 38 erst 7 einzeln addirt. Oder 7 = 3 + 3 + 1, so hätten wir hier 38 + 3 = 41 + 3 = 44 + 1 = 45. So 37 + 8 = 37 + 10 = 47 — 2 = 45. Und 19 + 9 = 19 + 10 = 29 — 1 = 28.

3. Bey größern Zahlen giebt es ähnliche Hülfsmittel. Z. B. 11 = 10 + 1; 12 = 10 + 2; So ist 53 + 17 = 53 + 10 + 7 = 70. Oder 17 = 20 — 3; also 53 + 17 = 53 + 20 = 73 — 3 = 70.

Subtraction.

II. Bey den benannten Zahlen:

4 Rthlr. 21 ggl. 9 Pf.
ab 1 = 22 = 4 =

ist Rest 2 Rthlr. 23 ggl. 5 Pf.

kann

kann man statt 1 Rthlr. von 4 Rthlr. zu borgen, und zu seinen 24 ggl. 21 zu addiren, und dann den Abzug mit 22 ggl. zu machen, gleich die 22 ggl. von 1 Rthlr. = 24 ggl. abziehen, giebt Rest 2 ggl. und diese zu den vorhandenen 21 ggl. addiren, giebt den ganzen Rest mit 23 ggl. Oder: 9 ℔. 19 Lt. 1 Qu.

ab = 4 = 27 = 3 =

ist Rest 4 ℔. 23 Lt. 2 Qu.,

nämlich saget: 3 Qu. von 1 Lt., Rest 1 Qu.; dazu 1 Qu. addirt, Rest 2 Qu.; 27 Lt. von 1 ℔, Rest 5 Lt., addirt 18 Lt. = 23 Lt. R.

Multiplication.

III. Kann der Multiplicator als eine zusammengesetzte Zahl angesehen werden (3. Cap. XXI.), so kann man den Multiplicandus zuerst mit einem von den Factoren dieser Zahl, und hernach das Product mit dem andern Factor multipliciren.

1. Dies ist so zu verstehn: Soll ich eine Zahl mit 6 multipliciren, so multiplicire ich sie erstlich mit 3 und dann das Product mit 2, so habe ich das Product der Zahl mit 6. Denn 6 ist 3, zweymahl genommen. Multiplicire ich also die Zahl 8 mit 3, so habe ich 24, nehme dies Product 2 mahl, so ist es 48; dies ist eben das, als $8 \times 6 = 48$.

Durch die erste Multiplication mit 3 erhielt ich 8, 3 mahl, und da ich dieses Product mit 2 multiplicirte, so erhielt ich das dreyfache von 8, 2 mahl, das war das sechsfache, welches verlangt ward.

2. Wenn ich in einem Beutel mehrere Rollen mit Gelde habe, in jeder Rolle 10 Rthlr., und nehme auf einmahl 6 solche Rollen, so habe ich 60 Rthlr. Nehme ich aber auf einmahl 3 solche Rollen, thue aber 2 solche Griffe, so habe ich auch 60 Rthlr.

Bayerische Staatsbibliothek München

3. Habt ihr daher Zahlen zu multipliciren, wo der Multiplicator aus mehr, als einer Zifer besteht, so versucht, ob er als eine durch die Multiplication entstandene Zahl angesehen werden könne. Z. B. 368 mit 24.

Also: 368
6
2208 denn 24 = 6 × 4.
4
8832 Product.

Durch dieses Verfahren erspahrt man sich das Hineinrücken der speciellen Producte und das nochmahlige Addiren derselben.

4. Es versteht sich von selbst, daß ich hier nicht 368 mit 6 multiplicire und denn 368 mit 4 multiplicire und zuletzt beyde Producte addire; dies würde 368 mit 6+4, d. i. mit 10 multiplicirt seyn.

5. Zahlen, die man nicht als aus der Multiplication so entstandene sich denken kann, z. B. 49 können nicht so gebraucht werden. Allein 49 ist doch gleich 8 × 6 + 1. Solltet ihr 84 mit 49 multipliciren, so multiplicirt diese Zahl erst mit 8, das Product mit 6 und zuletzt addirt 84 zu dem letztern, so giebt diese Summe das ganze Product von 84 × 49; Als:

84		84	
8		49	
672	ist gleich	756	
6		336	
4032		4116	
84			
4116			

Oder:

Oder: 86 × 44. 44 = 7 × 6 + 2.

86 × 7		86	
602 × 6.		44	
3612		344	
172	gleich	344	
3784 Product		3784	

Hier setzten wir den Multiplicator 7 neben 86, und neben das Product 602, die 6, um Raum zu erspahren. Auch multiplicirten wir 86 mit 2 (nach einer bloßen Uebersicht), ohne die 2 darunter zu schreiben, und setzten das Product 172 gleich unter das letztere Product von 6 in 602.

6. Man kann auch auf diese Art multipliciren, wenn gleich die Zahlen noch weniger, als durch die Multiplication entstanden, angesehen werden können oder sollen.

Z. B. 368 × mit 25

$$= \begin{cases} 368 \times 20 = 7360 \\ 368 \times 5 = 1840 \end{cases}$$

$368 \times 25 = 9200$ Product.

So ist $368 \times 25 =$ 368 × 5

1840 × 5

9200 Product.

Ingleichen $368 \times 25 =$ 368

20

7360

1840 = 368 × 5

9200 Product.

7. Man sieht aber, daß solche Abkürzungen, wenn sie erst anfangen zusammengesetzter zu werden, das zu seyn aufhören, was sie seyn sollen.

8. Zuweilen läßt sich ein Multiplicator in eine größere Zahl dividiren, mit welcher man auf eine sehr leichte Art den Multiplicandus multipliciren kann. Man darf alsdenn

denn nur blos mit dem Quotienten eines solchen Multiplicators in die größere Zahl das Product dividiren, so hat man in diesem Quotienten das gesuchte Product. Z. B. Es sollen 6839 mit 25 multiplicirt werden. Nun ist 25 von 100, $\frac{1}{4}$. Multiplicirt also 6839 mit 100 und dann dividirt dieses Product mit 4, so ist

$$\overset{4}{|}\ 683900 \mid 170975 =$$ dem gesuchten Producte.

Hier war die Multiplication mit 100 ohne alle Weitläuftigkeit, und die Division mit 4 gleichfalls leicht.

Oder 5864 sollen multiplicirt werden mit $33\frac{1}{3}$. Nun ist $33\frac{1}{3}$ der dritte Theil von 100. Also multiplicirt 5864 mit 100, dividirt das Product durch 3, so ist der Quotient das gesuchte Product.

$$\overset{3}{|}\ 586400 \mid 195466\frac{2}{3}$$

Dies ist eine große Abkürzung des gewöhnlichen Verfahrens, statt:

$$5864 \times 33\frac{1}{3}$$
$$33$$
$$17592$$
$$17592$$
$$193512 + \frac{1}{3}$$
$$1954\frac{2}{3}$$
$$195466\frac{2}{3}$$

9. Da es sich mit den Factoren, die sich in Nullen endigen, zumahl wenn vor ihnen blos die 1 steht, z. B. 10, 100, 1000 ꝛc. sehr geschwind multipliciren läßt, so kann man auch, wenn eine Zahl mit einem Factor multiplicirt werden soll, der fast jene Zahlen erreicht, gleich diese Zahlen zum Multiplicator nehmen, damit multipliciren und hernach nur den Multiplicandus von diesem Producte so oft abziehen, als 1 in der Zahl enthalten ist, welche die Differenz zwischen dem wahren Multiplicator

und

und jenem dazu gemachten ist. Z. B. es soll 582 mit 99 multiplicirt werden. 99 differirt von 100 um 1. Multiplicirt also 582, statt mit 99, gleich mit 100. Ziehet aber hernach von dem Producte gleich 582 einmahl ab, so habt ihr das wahre Product in diesem Reste.

58200 — das ist 582 × 99
582 — 5238
57618 Product — 5238
— 5238
— 57618

Oder 612 × 97. 61200 — das ist 612 × 97
1836 — 4284
59364 — 5508
— 59364

Hier war in der Differenz 97 von 100 die 1 dreymahl enthalten, folglich mußte 612, 3 mahl, d. i. mit 3 multiplicirt, abgezogen werden. Wer ein wenig geübt ist, schreibet 612 × 3 gleich an seinen Ort hin, ohne es besonders erst auszurechnen.

735 × 999 = 735000
735
734265

999 differirt von 1000 um 1, folglich ward von 735 × 1000 nur 735, einmahl abgezogen.

Es kann auch bey einer größern Differenz dieses Verfahren vortheilhaft werden.

368 × 375 = 368
300
110400
9200
101200 Product

 Wir

Wir nahmen 368 erstlich 300 mahl, also um 25 mahl zu viel, daher ward 368 × 25 = 9200 abgezogen.

10. Die Brüche selbst geben oft ein vortreffliches Abkürzungsmittel für die Multiplication ab. Z. B. Multipliciret 8 ggl. mit 360. Saget $\frac{1}{3}$ Rthlr. × 360 = $\frac{360}{3}$ Rthlr. = 120 Rthlr.

2 Zt. 20 ℔, 11 mahl, d.i. $2\frac{2}{11}$ Zt. × 11 = $22\frac{22}{11}$ Zt. = 24 Zt.

8 Rthlr. 3 ggl. 6 Pf. mit 282 multiplicirt, wie viel?

= $\frac{192}{24} + \frac{3}{24} = \frac{\frac{1}{2}}{24} = \frac{391}{48} \times 282 = \frac{110262}{48}$ Rthlr.

= 2297 Rthlr. 3 ggl. Hier durfte nicht erst alles zu Pfennigen resolvirt, und die in dem Producte erhaltene größere Zahl zu Groschen und Thalern reducirt werden.

11. In diesen Exempeln wurden die Sorten in einen unächten Bruch verwandelt und mit einer ganzen Zahl multiplicirt. Man kann aber die Multiplication auch abkürzen, wenn man den einen Factor, der aus mehrern zusammengesetzten Sorten besteht, als einen ächten Bruch ansieht, und damit den andern multiplicirt; indem man in diesem Falle mit seinem Nenner blos dividirt, weil man den Zähler stets als 1 ansehen kann. Z. B. 12 ggl. 4 Pf. soll mit 66 multiplicirt werden. Saget: 66 × $\frac{1}{2}$ Rthlr. (denn 12 ggl. = $\frac{1}{2}$ Rthlr.), so ist es eben das, als wenn ihr $\frac{66}{2}$ Rthlr. hättet, das ist 66 Rthlr. $\frac{1}{2}$ mahl nähmet = 33 Rthlr. Hiernächst 4 Pf. 66 mahl ist eben das als $\frac{1}{3}$ ggl. 66 mahl = $\frac{66}{3}$ ggl. = 22 ggl. Folglich ist das Product = 33 Rthlr. 22 ggl. Man überhebet sich hierbey der vielen Umstände des Multiplicirens der 12 ggl. 4 Pf. mit 66 und Reduction auf Thaler und Groschen.

12. Ein solches Verfahren wird in den practischen Rechenbüchern das Zerstreuen genannt. Man kann dasselbe sehr weit ausdehnen und die Rechnungen dadurch schwerer machen, als das gewöhnliche Verfahren sie giebt.

Wir

Wir wollen einige wirkliche Abkürzungen in Exempeln zeigen.

4 ggl. 86 mahl: wie viel sind es Thaler, Groschen?

Ist $= \frac{1}{6}$ Rthlr. × 86 $= \frac{86}{6}$ Rthlr. $= 14\frac{1}{3}$ Rthlr. Oder, stellet euch vor, es sollte 1 Rthlr. 86 mahl genommen werden, so wärens 86 Rthlr. Nun aber ist 4 ggl. $= \frac{1}{6}$ Rthlr., also nehmet $\frac{1}{6}$ von 86 Rthlr. $= 14$ Rthlr. 8 ggl.

2 ggl. multiplicirt mit 95, wie viel Thaler, Groschen?

Ist $\frac{1}{12}$ Rthlr. × 95 $= \frac{95}{12}$ Rthlr. $= 7$ Rthlr. 23 ggl. Wär 1 Rthlr. mit 95 zu multipliciren, so wären es 95 Rthlr. Nun aber ist 2 ggl. $= \frac{1}{12}$ Rthlr. Daher giebt 95 durch 12 dividirt, in dem Quotienten die Zahl ganzer Thaler.

3 ggl. multiplicirt mit 517 $= \frac{517}{8}$ Rthlr. $= 64\frac{5}{8}$ Rthlr.

1 ggl. 900 mahl, wie viel Thaler, Groschen?

$= \frac{900}{24}$ Rthlr. $= 37$ Rthlr. 12 ggl. (denn 1 ggl. $= \frac{1}{24}$ Rthlr.).

Gesetzt aber, es wären 7 ggl. zu multipliciren mit 76. Da 7 ggl. in keinen Bruch von 1 Rthlr. gebracht werden können, der zum Zähler 1, und keinen großen Nenner hätte; so kann doch 7 ggl. in mehrere Theile zerlegt oder zerstreut werden, welche Theile nun von 1 Rthlr. ein Bruch werden können, der zum Zähler 1, und keinen großen Nenner hat. Denn 7 ggl. ist $=$ 6 ggl. + 1 ggl. gleich $\frac{1}{4}$ Rthlr. + $\frac{1}{24}$ Rthlr. Daher habt ihr $\frac{76}{4}$ Rthlr. + $\frac{76}{24}$ Rthlr.

Folglich 76 Rthlr.: 4 $=$ 19 Rthlr. und
76 Rthlr.: 24 $=$ 3 Rthlr. 4 ggl.

Summa 22 Rthlr. 4 ggl. = d. Product.

9 ggl. 100 mahl, wie viel Thaler und Groschen?

9 ggl. = 8 ggl. + 1 ggl. = 100 Rthlr.: 3 = 33 Rthlr. 8 ggl.
= 100 Rthlr.: 24 = 4 = 4 =

Summa 37 Rthlr. 12 ggl.

13. Man kann bey dem Zerstreuen oft noch kürzer verfahren. Z. B. da hier $\frac{100}{3}$ Rthlr. = 33 Rthlr. 8 ggl. sind und 1 ggl. = $\frac{1}{8}$ von 8 ggl., so dürfen wir die 33 Rthlr. 8 ggl. nur durch 8 dividiren, so müssen wir eben den Quotienten, als 100 Rthlr. : 24 erhalten. 33 Rthlr. 8 ggl. dividirt durch 8 giebt 4, $\frac{1}{8}$ mahl, d. i. $4\frac{1}{8}$ Rthlr. = 4 Rthlr. 3 ggl. Ferner 8 in die 8 ggl. = 1 mahl, d. i. 1 ggl. Summa 4 Rthlr. 4 ggl. wie vorhin.

14. In Ansehung der Art 33 Rthlr. 8 ggl. durch 8 zu dividiren, kann man hier gleich sagen: 8 in 33, 4 mahl = 4 Rthlr.; Rest 1 Rthlr. Dieser addirt zu 8 ggl. = 32 ggl. 8 in 32 ggl. 4 mahl = 4 ggl., welches Verfahren in den meisten Fällen am bequemsten ist.

15. Durch die Abkürzung (13.) erspahren wir die Division mit größern Zahlen, welches sonst nicht bequem ist. Statt 100 : 24 hatten wir 33 Rthlr. 8 ggl. : 8, welches leichter ist.

7 Rthlr. 19 ggl. sollen mit 93 multiplicirt werden.

93

7 Rthlr. 19 ggl. sind $\frac{1}{2}$ Rthlr. + $\frac{1}{4}$ Rthlr. + $\frac{1}{24}$ Rthlr.

a) 651 Rthlr.
b) 46 Rthlr. 12 ggl.
c) 23 = 6 =
d) 3 = 21 =

Sm. 724 Rthlr. 15 ggl. gleich dem Producte.

b) 93 : 2 = $46\frac{1}{2}$ Rthlr.
c) $46\frac{1}{2}$: 2 = 23 Rthlr. 6 ggl.
d) 23 : 6 = 3 Rthlr. 21 ggl.

Hier ward in a) 93, 7 mahl
genommen, — — gab 651 Rthlr. — ggl.
in b) 93, $\frac{1}{2}$ mahl, gab das Pro=
duct, als wenn 93 Rthlr. ein
halb mahl, d. i., als wenn 12 ggl.
93 mahl genommen wären — = 46 Rthlr. 12 ggl.
in c) nahmen wir von $46\frac{1}{2}$ Rthlr.
die Hälfte, weil, da $46\frac{1}{2}$ Rthlr.
= ist 12 ggl. 93 mahl, diese
Hälfte gleich seyn muß 6 ggl. 93
mahl genommen — = = 23 Rthlr. 6 ggl.
in d) nahmen wir von 23 Rthlr.
6 ggl. den sechsten Theil, weil,
da 23 Rthlr. 6 ggl. = 6 ggl.
93 mahl genommen, dieser sechste
Theil gleich seyn muß 1 ggl. 93
mahl genommen — = = 3 Rthlr. 21 ggl.

Summa 724 Rthlr. 15 ggl.

16. Statt von $23\frac{1}{4}$ Rthlr. den sechsten Theil zu nehmen, kann man gleich aus 93 den vier und zwanzigsten nehmen, ist 93 : 24 = 3 Rthlr. 21 ggl. wie vorhin gefunden ward. Ueberhaupt lehren hier immer die Umstände, was am füglichsten zu thun sey.

17. 8 Rthlr. 9 ggl. 4 Pf. multiplicirt mit

74

8 Rthlr.

592 Rthlr.

9 ggl. { 8 gl. = $\frac{1}{3}$ Rthl. 74 Rthl. : 3 = 24 = 16 ggl. — Pf.
1 gl. = $\frac{1}{8}$ Rthl. also

24 Rthlr. 16 gl. : 8 = 3 = 2 = — =
4 Pf. = $\frac{1}{3}$ gl. also 3 Rthl. 2 gl. : 3 = 1 = — = 8 =

Summa 620 Rthlr. 18 ggl. 8 Pf.

Hier war 1 ggl. 74 mahl genommen = 3 Rthlr. 2 ggl.

Daher mußten 4 Pf. als $\frac{1}{3}$ ggl. 74 mahl erhalten werden, wenn ich von 3 Rthlr. 2 ggl. den dritten Theil nahm, welches geschehen ist.

16 Rthlr. 7 ggl. 5 Pf. 103 mahl.

103 Rthlr. × 16 = 1648 Rl. — gl. — Pf.

7 gl. { $\frac{1}{4}$ Rthlr. also 10 : 4 = " 25 " 18 " — "
$\frac{1}{6}$ Rthlr. also 25 Rl. 18 gl. : 6 = " 4 " 7 " — "

5 Pf. { 4 Pf. = $\frac{1}{3}$ gl. also 4 Rl. 7 gl. : 3 = " 1 " 10 " 4 "
1 Pf. = $\frac{1}{4}$ gl. also 1 " 10 " 4 Pf. : 4 = " " 8 " 7 "

Summa 1679 Rl. 19 gl. 11 Pf.

welches das ganze Product ist.

Zu den 5 Pf. nahmen wir erst den 3ten Theil von 1 ggl., 103 mahl genommen, indem wir in 4 Rthlr. 7 ggl. mit 3 dividirten; dadurch erhielten wir 4 Pf., 103 mahl genommen. Den 5ten Pf. erhielten wir 103 mahl genommen, indem wir mit 4 in den letztern Quotienten, nemlich 1 Rthlr. 10 ggl. 4 Pf. dividirten, weil 1 Pf. von 4 Pf. der vierte Theil ist, und 1 Rthlr. 10 ggl. 4 Pf. das Product waren von 4 Pf., 103 mahl genommen.

Auch das Resolviren kann durch eine Verwandlung in Brüche oft vermieden werden. Statt bey dem Exempel (5. Cap. XI. 4.) die 16 ggl. in 192 Pf. zu resolviren, und mit 24 zu dividiren, so setzet gleich an: Wenn 24 Steine 16 ggl. kosten, so kostet 1 Stein $\frac{16}{24}$ ggl., d. i. $\frac{8}{12}$ ggl., d. i. 8 Pf.

Division.

IV. Da die Division eine umgekehrte Multiplication ist, so kann man, wenn man den Divisor als eine aus der Multiplication zweyer Factoren entstandene Zahl ansehen kann, mit einem dieser Factoren in den Dividendus, und mit dem andern wieder in den eben

entstan-

entstandenen Quotienten dividiren, so giebt der letztere Quotient den gesuchten. Auf diese Art verwandelt man das Dividiren mit einem größern Divisor in ein weniger umständliches zweyfaches mit kleinern Divisoren. Z. B. 96:24. Es ist $24 = 6 \times 4$, also dividirt in 96 mit $6 = 16$ und nun in 16 mit 4, so ist 4 der Quotient von 96:24.

Denn 96:6 ist 16. Nun soll aber 96 nicht mit 6, einmahl genommen, dividirt werden, sondern mit 6, viermahl genommen, daher mußte 16 noch durch 4 dividirt werden.

420:84. $84 = 12 \times 7$, also $420:12 = 35$; und $35:7 = 5$. Also ist 5 der Quotient von 420:84.

1. Indessen können bey der ersten Division leicht Brüche entstehn, wodurch die Verrichtung wieder weitläufig wird. 690:72; $72 = 9 \times 8$. Also $690:9 = 76\frac{2}{3}$; und $76\frac{2}{3}:8 = 9\frac{7}{12}$, obgleich es dem, der mit den Brüchen fertig rechnen kann, keine Mühe machen wird.

2. Der Divisor geht zuweilen in eine Zahl, mit der sich leicht multipliciren läßt, auf. Dann dividirt mit dieser Zahl den Dividendus, und multiplicirt den Quotienten mit dem Quotienten des Divisors in jene Zahl. Das Product ist der gesuchte Quotient. Als:

8946:50 (50 geht in 100 auf; der Quotient ist 2). Also $8946:100 = 89\frac{46}{100}$, und dies mit 2 multiplicirt

$$\overline{178\frac{92}{100}} = \text{dem wirklichen Quotienten.}$$

83694:25 (25 in 100, 4 mahl) also $8369\frac{4}{100}$, multiplicirt mit $4 = 3347\frac{16}{25}$, der Quotient.

Dividirt 9836 durch 75. Es ist 75 von 600 der achte Theil. Daher dividirt 9836 mit 600 und multiplicirt das Product mit 8; der Quotient $131\frac{1}{75}$ ist der gesuchte.

3. Hier

3. Hier konnte eben so gut 9836 mit 8 multiplicirt und das Product durch 600 dividirt werden.

4. Manche glauben, sich die Division zu verkürzen, wenn sie zu einem Exempel, wo der Divisor aus mehrern, vorzüglich großen, Zahlen besteht, sich eine besondre Tafel entwerfen, welche die Producte des Divisors durch die 9 Einer, vorzüglich die letztern, enthält. Z. B. 52986746 soll dividirt werden mit 8976; so würde man sich eine Tafel verfertigen können, welche von 8976 die Producte der Einer enthielte, und dürfte denn nur blos beym Dividiren, um den rechten Quotienten zu finden, die Tafel ansehn, als:

8976 {
X 2 = 17952
X X 3 = 26928
X X X 4 = 35904
X X X X 5 = 44880
X X X X X 6 = 53856
X X X X X X 7 = 62832
X X X X X X X 8 = 71808
X X X X X X X X 9 = 80784
X X X X X X X X X 10 = 89760
}

Es wird die Verfertigung einer solchen Tafel mehr aufhalten, als fast die gewöhnliche Berechnung des Exempels; nur hat man dabey den Nutzen, daß, weil man den rechten Quotienten nie verfehlt, man auch keine Correctur in dem Exempel anzubringen nöthig hat, wodurch die Nachrechnung erschweret und das Ansehn einer Rechnung entstellt wird.

5. Man hat noch eine Art zu dividiren, welche das Dividiren über sich (richtiger überwärts) genennt wird, indem dabey der Divisor unter den Dividendus, der Rest über denselben gesetzt wird, und die Zahlen, worin bereits dividirt ist, durchstrichen werden (Die bisher gelehrte Art wird das Dividiren unter sich genannt.)

Ein

Ein Divisor aus einer Zahl.

24	
2492	356
777	

7 in 24, 3 mahl, 3 mahl 7 ist 21, von 24 Rest 3; die 3 über die 4 gesetzt, und 7. 2. 4 durchstrichen. Nun 7 in 39, 5 mahl; 5 mahl 7 ist 35, von 39, Rest 4; die 4 über die 9 gesetzt, und 7. 3. 9 durchstrichen. Endlich 7 in 42, 6 mahl; 6 mahl 7 ist 42, von 42 geht auf, und 7. 4. 2 durchstrichen.

Es ist dies ganz das vorige, nur die Stellung der Zahlen ist verschieden, und Raum ist gespahrt.

Ein Divisor aus 2 Zahlen, 64920:24.

72	
7672	
6492	2705
44444	
222	

Ein Divisor aus 3 Zahlen, 768144:312.

7	
72	
7272	
7272	
7472	
77472	
77872	2494
7772222	
777	
77	

6. Diese Art zu dividiren hat nur theils das Unbequeme, daß bey dem Ueber- und Untersetzen der Zahlen sich leicht ein Fehler einschleicht, theils daß die Exempel nicht wohl nachgerechnet werden können, weil die Zahlen durchstrichen sind.

Brüche.

V. Das Aufheben wird sehr erleichtert, wenn man Zähler und Nenner als durch die Multiplication entstandene Zahlen ansieht (III.) und in ihre Factoren zerlegt. Man wirft nämlich aus Zähler und Nenner die gleichen Factoren heraus, und multiplicirt die andern unter einander, deren Producte den neuen Zähler und Nenner geben. Dafern nur eine Zahl bleibt, so ist diese allein das Product. Als: $\frac{6}{7}\frac{3}{2}\frac{}{0}$; $63 = 7 \times 9$ und $720 = 8 \times 9 \times 10$; werfet die 9 aus Zähler und Nenner, so bleibt $\frac{7}{8}\frac{}{0}$.

In $\frac{9}{1}\frac{6}{4}\frac{}{x}$, ist $96 = 8 \times 4 \times 3$ und $144 = 4 \times 3 \times 12$; daher werfet 4 und 3 weg, so habt ihr $\frac{8}{1}\frac{}{2} = \frac{2}{3}$.

1. Wenn in dem Zähler alles ausgestrichen wird, so kommt in den neuen Zähler 1; als: $\frac{4}{9}\frac{8}{6}$; $48 = 8 \times 6$; $96 = 8 \times 6 \times 2$; streichet 8 und 6 aus, so bleibt $\frac{1}{2}$.

2. Bey diesen Abkürzungen muß man sich zu der Fertigkeit gewöhnen, die Zahlen in schickliche Factoren bald auflösen zu können. Es müssen daher auch Producte größrer Factoren nicht unbekannt seyn. Z. B. hier mußte man ohne Umstände wissen, daß $12 \times 12 = 144$ ist.

3. Bey Zahlen, die sich mit 0 endigen, kann man sicher einen Factor als 10 annehmen, aus 00 einen von 100 u. s. w.

Zusätze zu den vier Speciebus.

Einige zusammengesetztere Berechnungen.

Bey manchen Fällen wird nicht blos allein addirt, oder subtrahirt ꝛc., sondern es muß ein Verfahren beobachtet werden, das schon etwas zusammengesetzter ist. Es giebt dabey allein das Nachdenken an die Hand, was man zu thun habe, und die bisher gelehrten Grundsätze zeigen alsdann, wie man es thun müsse. Beson-

dere

dere Regeln lassen sich hierzu keinesweges ertheilen, weil die Fälle zu mannigfaltig sind. Einige Beyspiele werden einige Erläuterung geben.

1. In einer Haushaltung braucht man wöchentlich 1 Scheffel und 1 Himpten Rocken. Wie viel in 5 Monaten, und 2 Wochen?

Saget: 3 Himpten in 1 Woche; in 22 Wochen (den Monat zu 4 Wochen gerechnet) 22 mahl 3 Himpten, d. i. 22 Himpten 3 mahl, macht 66 Himpten, d. i. 33 Scheffel = 1 Wispel 9 Scheffel Rocken.

Wir fügen hier zwey Bemerkungen hinzu:

Erstlich: Genau gerechnet kann man den Monat nicht zu 4 Wochen annehmen: denn 4 Wochen in 52 Wochen = 13 mahl. Auf diese Art würde man am Ende des Jahrs 4 Wochen eher mit seinem Vorrathe fertig werden, als die Rechnung lehrte. Man muß daher, wenn's auf Genauigkeit ankommt, die einzelnen Tage über 4 Wochen in jedem Monat mit in Anschlag bringen.

Zweytens: Hier sollten 3 Himpten mit 22 multiplicirt werden; oder 22 Himpten mit 3. Das Product ist einerley (5. Cap. VII. 5.). Man sieht hieraus, daß in solchen Fällen der Nebenbegriff bey der Zahl, hier z. B. Himpten, oder Wochen, nicht zur Sache weiter gehört, nachdem diese Nebenbegriffe einmahl dazu gedient haben, die Anlage zur Berechnung zu machen. Es kommt nun bloß auf die Zahlen der Factoren an, um das Product zu finden. Ist beydes gehörig beobachtet, so giebt das Product die Zahl mit dem ersten Nebenbegriffe durchaus richtig an. Hier 66, nämlich Himpten, weil 3 Himpten 22 mahl genommen wurden. Oder sind 22, 3 mahl genommen, so sind es zwar 66 Wochen, welche hier aber doch Himpten bedeuten müssen, weil eine Woche hier gleich der darin statt findenden Consumtion von 3 Himpten anzusehen ist.

2. Wenn 1 Morgen Acker 2 Rthlr. 6 ggl. Pacht giebt, was geben 5 Hufen 13 Morgen?

1 Hufe = 30 Morgen, macht 30 × 5 = 150 Morgen, dazu 13 Morgen = 163 Morgen, folglich 2 Rthlr. 6 ggl. × 163, giebt 366 Rthlr. 18 ggl.

3. Statt hier 163 Morgen noch mit 6 ggl. zu multipliciren, und die erhaltenen Groschen erst auf Thaler und Groschen zu reduciren, verwandelt die 6 ggl. gleich in $\frac{1}{4}$ Rthlr. und saget: $\frac{163}{4}$ Rthlr. = 40 Rthlr. 18 ggl. + 326 giebt das Obige zu 366 Rthlr. 18 ggl.

4. Wenn $9\frac{1}{4}$ Hufe Landes 740 Rthlr. jährliche Pacht geben, was giebt 1 Hufe von diesen?

Saget: $\frac{37}{4}$ Hufen geben 740 Rthlr | 20 Rthlr. Also $\frac{1}{4}$ Hufe 20 Rthlr. und 1 ganze 80 Rthlr.

In einer Wirthschaft sind vorräthig 16 Scheffel Rockenmehl: auf wie viel Wochen reicht der Vorrath hin, wenn wöchentlich 1 Scheffel und 1 Himpten verbraucht werden?

Saget: Wie oft sind 3 Himpten in 16 Scheffel? Quotient ist $10\frac{2}{3}$ mahl. Das sind hier $10\frac{2}{3}$ Wochen.

Eine ganze Feldflur hält 30240 Quadratruthen: Wenn nun die Flur 6 Hufen Landes in sich faßt, und jede Hufe 30 Morgen hält, wie viel Quadratruthen kommen auf 1 Morgen?

6 Hufen sind 180 Morgen: damit dividirt in die 30240 Quadratruthen = 168 mahl. Also hält jeder Morgen 168 Quadratruthen.

$5\frac{3}{8}$ Zt. kosten $17\frac{4}{9}$ Rthlr. was 1 Zt.?

$5\frac{3}{8}$ Zt. kosten 17 Rthlr. 10 ggl. 8 Pf. Was 1 Zt.?

5024 Pf. | 116 Pf. = 9 ggl. $8\frac{45}{43}$ Pf. = $\frac{1}{8}$ Zt.

Also 1 Zt. kostet 3 Rthlr. 5 ggl. $10\frac{40}{43}$ Pf.

Hier konnte nicht füglicher verfahren werden; es mußten die $17\frac{4}{9}$ Rthlr. erst in Pfennige resolvirt werden.

Bey

Bey dem Handel wird die reine Waare an sich in Ansehung des Gewichts Netto genannt. Mit der Emballage, worinnen sie ist, oder ihrem Gefäße, heißt sie Brutto; die bloße Emballage, oder Gefäß heißt Thara.

Wenn nun $\frac{1}{2}$ Tonne Hollsteinische Butter Brutto $285\frac{1}{2}$ ℔, das Thara $33\frac{1}{2}$ ℔ wiegt, was kostet 1 ℔ Butter, dafern das Netto $47\frac{1}{4}$ Rthlr. kostet?

Brutto $= 285\frac{1}{2}$ ℔ 252 ℔ $= 47\frac{1}{4}$ Rthlr.

Thara $= 33\frac{1}{2}$ ℔ 126 : $\frac{189}{4}$ Rthlr. $= \frac{1\frac{1}{2}}{8}$ Rthlr.

Netto $= 252$ ℔

macht 4 ggl. 6 Pf.

Hier giebt Thara von Brutto abgezogen das Netto à 252 ℔; da nun das Netto $47\frac{1}{4}$ Rthlr. kostet $= \frac{189}{4}$ Rthlr., so dividirt mit $\frac{252}{2}$ ℔ $= 126$ in 189; der Quotient ist $\frac{1\frac{1}{2}}{4}$ und da der Divisor um $\frac{1}{2}$ zu klein genommen ist, so wird der Quotient auch um $\frac{1}{2}$ mahl kleiner genommen werden müssen; also ist der wahre Quotient $= \frac{1\frac{1}{2}}{8}$ Rthlr. $=$ 4 ggl. 6 Pf. (Der Rest $\frac{1}{2}$ ist im Quotienten $\frac{\frac{1}{2}}{4}$, da der Quotient nur $\frac{1}{4}$ ist).

1 Orthof Wein kostet in Hamburg mit Faß $34\frac{1}{2}$ Rthlr. in Golde. Fracht und Spesen belaufen sich auf $12\frac{1}{3}$ Rthlr. Courant. Accise kostet $7\frac{1}{4}$ Rthlr., noch Unkosten 14 ggl. Was kostet nun 1 Maaß dieses Weines, wenn 32 Maaß auf 1 Anker, 6 Anker auf 1 Orthof gehn, und 1 Louisd'or $=$ 5 Rthlr. 16 ggl. Courant ist?

Wein kostet	34	Rthlr.	12	ggl.	in Golde.	
Agio =	4	=	14	=	$4\frac{4}{5}$	Pf.
Fracht u. Spesen =	12	=	8	=	—	=
Accise =	7	=	6	=	—	=
Andere Unkosten —	=		14	=	—	=
Summa	59	Rthlr.	6	ggl.	$4\frac{4}{5}$	Pf.

180 Maaß in $59\frac{1}{4}$ Rthlr., das ist,

$\frac{237}{4}$ Rthlr. : $\frac{720}{4}$ = $\frac{237}{720}$ Rthlr. = 7 ggl. $10\frac{72}{90}$ Pf.

Hier sind die $4\frac{4}{5}$ Pf. nicht in Rechnung gebracht, weil sie die Rechnung weitläuftiger gemacht haben würden und nichts darauf ankommt.

Wollten wir indessen die $4\frac{4}{5}$ Pf. noch mit in Rechnung bringen, so würden wir pro Maaß 7 ggl. $10\frac{6}{7}\frac{2}{5}$ Pf. erhalten. Da wir hier sehen konnten, daß die $4\frac{4}{5}$ Pf. auf ein Maaß nicht 1 Pf. betragen könnten, so durften wir nur $4\frac{4}{5}$ Pf. durch 180 dividiren = $\frac{24}{5}$ Pf. : 180 = $\frac{24}{900}$ Pf. = $\frac{2}{75}$ Pf.

Wollte man aber bey ähnlichen Fällen einen solchen Bruch, als $4\frac{4}{5}$ Pf. in die ordentliche Rechnung mit einbringen, so hätten wir hier $\frac{237}{4}$ gehabt, und da 4 Pf. = $\frac{1}{18}$ ist von $\frac{1}{4}$ Rthlr., so müßte 237 mit 18 multiplicirt werden, giebt 4266, dazu die 4 Pf. als $\frac{1}{18}$ addirt = 4267; diese durch die Multiplication mit 4 zu Pfennigen gemacht, giebt 17068 Pf. und durch die Multiplication mit 5 zu Fünfteln gemacht, giebt 85340, dazu die $\frac{4}{5}$ addirt. giebt $\frac{85344}{5}$ Pf.: darin mit 180 × 5=900 Maaß dividirt, giebt, was das Maaß an ganzen Pfenn. kostet, nämlich $94\frac{6}{7}\frac{2}{5}$ Pf. macht 7 ggl. $10\frac{6}{7}\frac{2}{5}$ Pf. wie vorhin.

Weil hier die 85344 nur Fünftel von 1 Pf. waren, so multiplicirten wir gleich den Divisor 180 mit 5, so ward der Quotient ganze Pfennige.

Wenn einer Sache verschiedene Preise beygelegt werden, und man will denjenigen wissen, der dem wahren am nächsten kommen möchte, so addirt man diese Preise zusammen, dividirt in die Summe mit der Zahl der einzelnen Preise, und nennt den Quotienten den Preiß, nach einem Durchschnitte. Z. B. ein Pferd wird von A taxirt zu 70 Rthlr., von B zu 85, von C zu 90 Rthlr. Wie hoch ist sein Mittelpreiß, oder sein Preiß nach einem Durchschnitte dieser Preise?

$70+85+90=245$; dividirt durch 3, als die Zahl der Preise $=81\frac{2}{3}$ Rthlr., der Mittelpreiß.

Auf gleiche Art verfährt man auch in anderer Hinsicht, gewisse Mittelzahlen zu finden, die, wenn sie gleich die Wahrheit nie ganz erreichen, doch derselben stets so nahe kommen, daß man mit Sicherheit weiß, daß nicht viel gefehlt sey. Z. B. An einem Orte sterben in einem Jahre 500 Menschen, in einem folgenden 478, in einem dritten 509 u. s. w. Man will wissen, wie viel jährlich im Durchschnitte in einer Zeit von 10 Jahren sterben?

Die Summe von 10 Jahren ist 4960 Menschen, dividirt durch $10=496$. So viel sterben jährlich im Durchschnitte.

Außerordentliche Fälle machen bey solchen Berechnungen Ausnahmen. Z. B. in dem letztern Falle, ein großes Sterben ꝛc.

Der Weizen kostet 1789. 40 Rthlr. 1790. 42 Rthlr. 1791. 35 Rthlr. 1792. 34 Rthlr. 1793. 36 Rthlr. 1794. 39 Rthlr; was im Durchschnitte von diesen 6 Jahren?

$226:6=37\frac{4}{6}$ Rthlr.

Es ist gemengt Rocken 20 Schffl. à 1 Rthlr. = 20 Rthlr.
Erbsen 15 " " $1\frac{1}{4}$ " = $18\frac{3}{4}$ "
Hafer 50 " " $\frac{1}{2}$ " = 25 "
Summa 85 Schffl. — — = $63\frac{3}{4}$ Rtlr.

Also 1 Scheffel Mengkorn am Werthe = $\frac{3}{4}$ Rthlr.

Eine Tonne Heringe hält $16\frac{1}{2}$ Schock Heringe, kostet $18\frac{1}{2}$ Rthlr. was 1 Hering?

990 Heringe kosten $18\frac{1}{2}$ Rthlr. was 1 Hering?

$18\frac{1}{2}$ Rthlr. = 444 ggl. = 5328 Pf. : 990 = $5\frac{1}{4}\frac{8}{9}\frac{9}{1}$ Pf.

Das achte Capitel.

Etwas über die Proben bey den vier Rechnungsarten.

I. Wenn man dasjenige Verfahren eine Probe nennt, wodurch man eine unzubezweifelnde Gewißheit erhält, daß man beym Rechnen durchaus nicht gefehlt habe, so giebt es gar keine Proben. Denn obgleich der Theorie nach, die bereits gelehrten Proben (3. Cap.) der vier Rechnungsarten eine völlige Richtigkeit geben, so kann doch, da bey den Proben gerechnet wird, selbst bey den Proben gefehlet werden, und es also entweder ungewiß bleiben, ob der Fehler in dem Exempel, oder in der Probe stecke, in welchem Falle doch nachgerechnet werden müßte; oder man kann auch bey einem in dem Exempel begangenen Fehler, in der Probe einen dergestalt entgegengesetzten begehen, daß dadurch das falsch gerechnete Exempel für richtig erklärt wird, da es doch falsch ist.

1. Bey dem falschgerechneten Subtractionsexempel würde eine Probe 4913 statt 5003 geben, und am Ende doch das genaue Nachsehen des Exempels den wahren Rest lehren müssen.

5003
2904
2009

2. Bey

2. Bey eben diesem falsch berechneten Exempel würde ein Fehler in der Probe, der die im Exempel durch einen Fehler verlornen 9 Zehner gerade wieder ersetzte, das Exempel für richtig erklären, da es doch falsch ist. Als wenn ich in der Prvbe fehlerhaft addirte: 9+4 ist 13; 0+0+1 ist 10; 9+1 ist 10; 2+2+1 ist 5; so käme der Minuendus 5003 heraus, da doch das Exempel unrichtig ist.

II. Es sind daher die Proben Versuche, woraus, wenn sie die Richtigkeit des Exempels bestätigen, man einen ziemlichen Grad der Gewißheit erhält, daß man recht gerechnet habe; zumahl, wenn diese Versuche mit Genauigkeit vorgenommen werden, und man mehrere verschiedene anstellt, die alle einerley Resultat geben.

III. Bey dem Addiren wird jene Probe (3. Cap. IX.) wegen ihrer Umständlichkeit in praxi nicht vorgenommen; dagegen erhält man durch die Versuche (5. Cap. IV.), zumahl wenn sie sämmtlich angestellt werden, eine große Gewißheit von der Richtigkeit des Addirens, wenn sie sämmtlich einerley Resultat geben. Diese Gewißheit erreicht den höchsten Grad, wenn man sich bereits zu einem richtigen Rechnen gewöhnt hat und bey dem Rechnen nicht zerstreut gewesen ist. Bey großen und wichtigen Rechnungen verlohnt es sich immer der Mühe, so zu verfahren.

IV. Subtrahirt man, so ist es zu rathen, stets die Probe bey jeder Subtraction (nach Cap. 3. IX.) vorzunehmen. Sie ist ohne Umständlichkeit, und kann auch deswegen gleich im Kopfe vorgenommen werden, zumahl weil sie niedergeschrieben in einer Rechnung eine unschickliche Aussicht geben würde. Da es sich nicht leicht treffen kann, daß bey dieser Probe ein Fehler begangen werden wird, der den beym Subtrahiren begangenen aufhübe (I. 2.), so kann man seiner Sache sehr gewiß

seyn, so bald diese Probe die Richtigkeit des Verfahrens bestätigt.

V. Bey dem Multipliciren kann leicht gefehlt werden, entweder durch Gedächtnißirrungen im Einmahleins, oder durch das, was im Sinn genommen ward, oder durch die Addition der Specialsummen, oder durch eine nicht recht genaue Stellung der Zahlen in den Specialproducten. Selbst durch die bey einem großen Multiplicationsexempel zuletzt der Einförmigkeit wegen entstehende Ermüdung, oder Art von Gleichgültigkeit, kann sich ein Fehler einschleichen. Daher ist auf jeden Fall die Abkürzung (7. Cap. III. 3.) zu empfehlen. Will man nach Cap. 3. probiren, so wird man um desto eher bey den benannten Zahlen seiner Sache gewiß werden können, weil bey diesen gewöhnlich noch eine Resolution vorzunehmen ist, die den Fehler noch eher bemerkbar machen würde.

4 Rthlr. 6 ggl. 3 Pf. × 5 = 21 Rthlr. 7 ggl. 3 Pf.

Probe 21 Rthlr. 7 ggl. 3 Pf. | 5 | 4 Rthlr. 6 ggl. 3 Pf.

1. Da 16 entsteht, aus 8 × 2, auch aus 5 × 3 + 1, so kann, statt einer Probe, auch eine Multiplication mit veränderten Factoren versucht werden. Z. B.

418 × 16

418		418	
8	oder	5	
3344 × 2		2090	
Prod. = 6688		3	
		6270	
+ 418		418	
Product = 6688			

Stimmte beydes nicht überein, so wäre der Fehler durch Nachrechnung aufzusuchen.

2. Die Brüche können nicht allein zuweilen als Abkürzung (7. Cap. III. 10.), sondern auch als Probe gebraucht werden. Z. B. das obige Exempel:

4 Rthlr.

4 Rthlr. 6 ggl. 3 Pf. ⋈ 5.
5 6 ggl. = ¼ ⋈ 5 = 5/4 Rthlr. = 1 Rthlr. 6 ggl.

20 Rthlr.
1 = 6 gl. 3 Pf. = ¼ gl. ⋈ 5 = 5/4 gl. = 1 gl. 3 Pf.
1 = 3 Pf.

Sma. = 21 Rthlr. 7 gl. 3 Pf. = dem Producte.

3. Selbst die Zerstreuung (7. Cap. III. 12.) giebt auch eine Probe ab:

1 Elle kostet 2 Rthlr. 4 ggl. 4 Pf. was 57 Ellen?
Macht 124 Rthlr. 7 ggl.

Probe: 57 ⋈ 2 Rtlr. = 114 Rtlr. 57 | 9 Rtlr. 12 gl.
9 = 12 gl. 9 Rtlr. 12 gl. | 19 ggl.
— = 19 =

124 Rtlr. 7 gl. = dem Producte.

VI. Hat man dividirt, so giebt jene Probe (3. Cap.) bey benannten, wie bey unbenannten Zahlen einige Gewißheit einer richtigen Rechnung.

Wenn 11 ℔ kosten 89 Rthlr. 21 ggl. 10 Pf., so kostet 1 ℔ 8 Rthlr. 4 ggl. 2 Pf.

Probe: 8 Rthlr. 4 ggl. 2 Pf. = 8 Rthlr. 1/6 Rthlr. 1/6 ggl.
gleich 88 Rthlr.
1 = 20 ggl.
1 = 10 Pf.

Summa 89 Rthlr. 21 ggl. 10 Pf. = dem Dividendo.

VII. Es gereicht auch zu einer Art von Probe bey größern Berechnungen, wenn man den Rechnungsfall umkehrt, das, was herausgebracht ist, als einen gewissen Satz annimmt und von neuem die Rechnung anstellt, worauf denn einer von den vorigen Sätzen sich genau wieder aus der Rechnung ergeben muß, wenn man recht gerechnet hat.

In einem der vorigen Exempel ward gefragt: Wenn 1 Morgen $2\frac{1}{4}$ Rthlr. Pacht giebt, was geben 5 Hufen 13 Morgen? Die Antwort war: $366\frac{3}{4}$ Rthlr. Saget nun: Wenn 5 Hufen 13 Morgen $366\frac{3}{4}$ Rthlr. geben, was giebt 1 Morgen? Antwort: 2 Rthlr. 6 ggl.

Käme hier eine andere Antwort heraus, so müßten beyde Rechnungen wieder durchgesehen werden.

Nun kann abermahls gefragt werden: Wenn 1 Morgen $2\frac{1}{4}$ Rthlr. giebt; man erhält aber $366\frac{3}{4}$ Rthlr. wie wie viel Morgen hat man?

Antwort: 163 Morgen.

Alle diese Antworten geben hinlänglich zu erkennen, daß man richtig gerechnet habe.

Wenn in einer Wirthschaft in 12 Wochen $15\frac{1}{4}$ Schffl. Korn verbraucht werden, wie viel in einer Woche?

Antwort: $1\frac{1}{4}\frac{3}{8}$ Scheffel.

Saget nun: Wenn $1\frac{1}{4}\frac{3}{8}$ Schffl. in 1 Woche verbraucht werden, wie viel in 12 Wochen?

Antwort: $15\frac{1}{4}$ Scheffel.

Oder, 1 Woche reicht zu $1\frac{1}{4}\frac{3}{8}$ Schffl. hin, zu wie viel Wochen $15\frac{1}{4}$ Scheffel?

Antwort; 12 Wochen.

Bey dem ersten Versuche des letztern Falles ward das herausgebrachte $1\frac{3}{4}\frac{3}{8}$ Scheffel als wahrer Satz angenommen, die Rechnung umgekehrt, und es ergab sich einer der erstern gewissen Sätze, woraus sich auf die Richtigkeit der Rechnung sicher schließen ließ.

In dem zweyten Versuche ward noch auf eine andere Art dieses Resultat angenommen, und es ergab sich der andere vorhero vorausgesetzte Satz, welches die Richtigkeit der Rechnung von neuem bestätigte.

Hätten wir die Regel de Tri schon erklärt, so könnten wir den Fall noch so verändern:

$15\frac{1}{4}$ Scheffel reichen zu 12 Wochen hin, wie lange $1\frac{1}{4}\frac{3}{8}$ Scheffel? Es müßte sich 1 Woche ergeben, welches vom neuen für die Richtigkeit der Rechnung bürgen würde.

Das

Das neunte Capitel.

Von den Verhältnissen und Proportionen.

I. Die Kenntniß von den Verhältnissen der Zahlen und den Proportionen ist jedem Rechner nothwendig, weil er ohne sie die Regel de Tri nie gründlich erlernen, auch nie im Stande seyn wird, bey dem bishero Gelehrten und folgenden in vorkommenden Fällen diejenigen Abkürzungen stets völlig sicher anzubringen, welche die Ausrechnung derselben so ungemein erleichtern, und eben dieselbe Sicherheit gewähren, als das gewöhnliche Verfahren.

II. Das Verhältniß zweyer Zahlen zu einander besteht in der Größe derselben unter einander. Sind sie einander gleich, so stehen sie unter einander in dem Verhältnisse der **Gleichheit**. Sind sie unter einander ungleich, so zeigt sich die **Ungleichheit** in dem Unterschiede zwischen denselben, der durch die Subtraction sichtbar wird.

Dieses ihr Verhältniß nennt man das **arithmetische Verhältniß**. So zeigt die Subtraction, daß 5 von 8 = 3 ist; die Differenz 3 giebt also beyder Zahlen **arithmetisches Verhältniß** an. Man drückt dieses Verhältniß auch vermittelst des Zeichens der Subtraction aus, als 8 — 5. Die Rechnungsfälle im gemeinen Leben aber nöthigen uns, auch das Verhältniß zweyer Zahlen unter einander nach dem Quotienten der einen Zahl in die andere zu betrachten. In diesem Quotienten besteht das geometrische Verhältniß derselben. So 2 in 8 dividirt, hat den Quotienten 4, 4 ist also das geometrische Verhältniß der 2 und 8. Man drückt es aus vermittelst des Zeichens der Division 8 : 2.

III. Die Kenntniß des geometrischen Verhältnisses ist in der Anwendung der Rechenkunst auf das gemeine Leben äußerst nothwendig, indem dieses Verhältniß bey sehr vielen Fällen desselben zum Grunde liegt. Wir glauben daher nicht zu fehlen, wenn wir bey dem Gesichtspuncte, aus welchem wir dieses Lehrbuch bearbeiten, das arithmetische Verhältniß und die sich darauf beziehende arithmetische Proportion nur neben bey berühren, vorzüglich aber uns mit dem geometrischen beschäfftigen werden.

IV. Alle Zahlen lassen sich an sich als ein arithmetisches, oder geometrisches, Verhältniß betrachten. Werden sie aber benennt, so können nur gleichartige Dinge als in einem Verhältnisse stehend angesehen werden. Denn 10 Rthlr. und 2 Rthlr. stehen sowohl in einem arithmetischen, als geometrischen, Verhältnisse gegen einander, weil 10 Rthlr. – 2 Rthlr. = 8 Rthlr., oder 10 Rthlr. : 2 Rthlr. = 5 ist. Eben so 4 ℔ und 8 ℔. Denn 4 ℔ differiren von 8 ℔ um 4 ℔ und sind in 8 ℔ zweymahl enthalten. Dagegen stehen 2 Eyer und 4 Scheffel Gerste in keinem, weder arithmetischen noch geometrischen, eigentlichen Verhältnisse: denn wie sind 2 Eyer von 4 Scheffel Gerste unterschieden? Nach der Zahl 2? Nach 2 Eyern, oder 2 Scheffeln? Eben so kann ich nicht sagen: 2 Eyer sind nach dem Quotienten 2 in 4 Scheffel Gerste enthalten; denn stecken 2 Eyer in 4 Scheffeln etwa 2 mahl?

1. Wollte man hierbey auf den Werth solcher ungleichartigen Dinge sehn, so käme ein Verhältniß des Werthes heraus; denn wären 2 Eyer $\frac{1}{48}$ Rthlr. werth, und 4 Scheffel Gerste 3 Rthlr., so wäre ein Verhältniß da, nämlich wie $\frac{1}{48}$ Rthlr. : 3 Rthlr. Dies ist indessen das ordentliche wahre Verhältniß beyder Sachen nicht, sondern nur ihres Werthes nach Gelde betrachtet. Man hat dahero, so bald es auf Verhältnisse ankommt, stets

genau

genau die Sachen zu erwägen, die in ein Verhältniß gestellt werden, und zu sehen, wie und in welcher Hinsicht sie mit einander in einem Verhältnisse stehn, oder als darin stehend betrachtet werden müssen.

2. Gleichartige Sachen brauchen nicht gleichnamige zu seyn. Wir haben schon gesehen, daß 1 ggl. $= \frac{1}{24}$ Rthlr. und 1 Lt. $= \frac{1}{32}$ ℔ sey ꝛc. ꝛc. Ggl. und Rthlr. und Pf. sind also als Geld; und Zentner, ℔ und Lt. als Gewicht gleichartige Dinge, und folglich sind Geschlechter (Genera) und ihre untergeordneten Gattungen (Species) allerdings gleichartige, wenn gleich oft nicht gleichnamige Dinge.

3. Dahero sind die Sorten (die Unterabtheilungen) mit der Sache, dazu sie gehören, gleichartig. Deswegen haben 20 ggl. und 1 Rthlr. ein arithmetisches und geometrisches Verhältniß zu einander; das erstere heißt hier 4 ggl.: denn die Differenz von 20 ggl. und 1 Rthlr. ist 4 ggl. oder von $\frac{20}{24}$ und $\frac{24}{24}$ ist sie $\frac{4}{24}$; und das geometrische Verhältniß heißt $1\frac{1}{5}$ mahl: denn der Quotient von $\frac{20}{24}$ und $\frac{24}{24}$ ist $1\frac{1}{5}$. Eben so sind Zent. ℔. Lt. Quent. Dinge, die in Proportion stehen können, ingleichen Wispel, Scheffel ꝛc. ꝛc. 1 Metze Weizen steht mit 1 Wispel Weizen allerdings in einem Verhältnisse, wenn gleich die Namen verschieden sind ꝛc.

4. Es kommt auch nicht auf die Menge (Quantität) an. Denn $\frac{1}{100}$ Metze Weizen steht immer mit 100 Wispel Weizen im Verhältniß. Der $\frac{1}{100}$ Metze ist, wenn gleich als ein kleiner Theil, doch in den 100 Wispel wirklich enthalten, und da wir diesen Theil noch mit Zahlen ausdrücken können, so kann auch sein Verhältniß zu 100 Wispel durch Zahlen ausgedrückt werden.

V. Den Quotienten bey dem geometrischen Verhältnissen werden wir stets den Exponenten desselben nennen.

VI. Die

VI. Die beyden Zahlen eines Verhältnisses nennt man Glieder des Verhältnisses; die zur Linken stehende heißt das erste; und die zur Rechten das andere, oder zweyte.

VII. Bey den Verhältnissen, so lange sie vor sich allein betrachtet werden, ist es einerley, ob die größre Zahl das erste, oder andre Glied ausmache. Man spricht es stets aus: verhält sich. Schreibe ich beym arithmetischen 5 — 8, so sage ich, 5 verhält sich zu 8; schreibe ich 8 — 5, 8 verhält sich zu 5; wiewohl ich dabey im erstern Falle eigentlich denke: 5 ist um so und so viel kleiner als 8, und im andern: 8 ist um so viel größer, als 5. Eben so bey dem geometrischen. 4 : 8 wird ausgesprochen: 4 verhält sich zu 8; und 8 : 4 heißt, 8 verhält sich zu 4; ob ich gleich im erstern Falle denke: 4 ist so und so oft in 8 enthalten, und im andern, 8 enthält so und so oft 4 in sich.

1. Es kommt bey Erwägung der Verhältnisse nicht darauf an, ob das größre Glied das erste, oder das zweyte sey. Denn man hat hierbey einzig und allein auf die Differenz, oder den Exponenten zu sehen.

VIII. Man kann das zweyte Glied des arithmetischen Verhältnisses ansehn, als wäre es das erste Glied und die Differenz dazu addirt, als in 2 — 5 ist 5 gleich 2 + Differenz, das ist 2 + 3. In den geometrischen ist das zweyte Glied das erste mit dem Quotienten multiplicirt, als 2 : 6, wo 6 ist 2 mit dem Exponenten multiplicirt, das ist $2 \times 3 = 6$.

IX. Die Glieder eines Verhältnisses bestehn nicht blos aus ganzen Zahlen, sondern sie können auch Brüche, vermischte, oder ächte, seyn. Z. B. die arithmetischen: $2 - 4\frac{1}{2}$, oder $3\frac{1}{2} - 6$, oder $2 - \frac{1}{4}$, oder $2\frac{1}{4} - 5\frac{3}{5}$; ingleichen $\frac{2}{3} - 6\frac{1}{2}$, oder $\frac{1}{4} - \frac{6}{8}$ u. s. w. Eben so die geometrischen, $3 : 6\frac{1}{2}$, oder $4\frac{1}{2} : 2$, oder $\frac{1}{2} : 4$, oder

$3\frac{1}{3}$

$3\frac{1}{3} : 6\frac{2}{3}$, oder $\frac{2}{4} : 3\frac{6}{4}$, oder $\frac{2}{8} : \frac{6}{8}$. Solche und noch andre Gestalten der Verhältnisse kommen vor.

X. Wollet ihr die Differenz, oder den Exponenten, der Verhältnisse finden, so subtrahirt nur in dem ersten Falle die Glieder von einander, in dem letztern dividirt das größere durch das kleinere. Z. B. $2 — 4\frac{1}{2}$, ist $\frac{4}{2} — \frac{9}{2}$, Differenz ist $2\frac{1}{2}$. Ingleichen $3 : 6\frac{1}{2}$ ist $\frac{6}{2} : \frac{13}{2}$, Exponent ist $2\frac{1}{6}$ u. s. f.

1. Hieraus sieht man zugleich, daß die Differenz der Glieder nicht blos eine ganze Zahl seyn dürfe, wie in den zuerst gebrauchten Beyspielen, sondern auch ein vermischter, oder reiner Bruch seyn könne. Z. B. in $2 — 4\frac{1}{2}$, wo die Differenz $2\frac{1}{2}$ ist; in $3 — 3\frac{1}{2}$ ist sie $\frac{1}{2}$. Eben so der Exponente in dem geometrischen. In $4 : 15$ ist er $3\frac{3}{4}$, oder in $2\frac{1}{2} : 6$ ist er $2\frac{2}{5}$. Im geometrischen Verhältnisse kann kein Exponent ein reiner Bruch seyn (X.).

2. Bey Gliedern, die zum Theil, oder ganz, aus Brüchen bestehn, kann doch die Differenz und der Exponente zuweilen eine ganze Zahl seyn, als $2\frac{2}{3} — 4\frac{2}{3}$, wo er 2 ist, und $2\frac{1}{2} : 10$, wo der Exponent 4 ist. In $3\frac{1}{3} : 6\frac{2}{3}$, d. i. $\frac{10}{3} : \frac{20}{3}$ ist er 2.

XI. Die Differenz und der Exponente bestimmen also allein die Verhältnisse, und es kommt daher nicht auf die Größe der Zahlen sonst an. Dahero sind die arithmetischen Verhältnisse $2 — 5$ und $8 — 11$, einander gleich; eben so die geometrischen, $4 : 16$ und $2 : 8$, denn in den beyden ersten ist die Differenz gleich, nämlich sie ist 3; in den beyden letzten ist der Exponent gleich, nämlich 4. Darum sind $4 : 16$ und $200 : 800$ gleiche geometrische Verhältnisse, wenn gleich das letztere aus großen Zahlen besteht.

1. Aus diesem Grunde kann man die Glieder eines Verhältnisses verändern, d. i. größer, oder kleiner, machen; das Verhältniß an sich wird dadurch nicht verändert,

wenn

wenn nur durch ein solch Verfahren die Differenz und der Quotient nicht verändert wird.

2. Bey dem arithmetischen Verhältnisse kann zu den beyden Gliedern einerley Zahl addirt werden. Dann werden die Glieder größer; das Verhältniß aber bleibt.

Als: 2 — 5
+ 3 — 3
5 — 8

so ist 5 — 8 dasselbige Verhältniß. Es kann auch nicht anders seyn: denn sind 2 Zahlen von einander um eine gewisse Zahl unterschieden, so muß der Unterschied bleiben, sobald einerley Zahl zu beyden kommt. Wenn A 5 Rthlr. hat und B 8 Rthlr., so wird zwar ihr Geld vermehrt, wenn ein jeder 3 Rthlr. noch dazu erhält; allein B hat nun nicht mehr Thaler vor A voraus, als er vorher hatte.

3. Auf gleiche Art können durch die Subtraction einer und eben derselben Zahl beyde Glieder vermindert werden, sie werden dann zwar kleiner; aber das Verhältniß bleibt aus dem eben angeführten Grunde. 16 — 20 haben zur Differenz 4; ziehn wir von beyden 5 ab, so sind 11 und 15 dasselbe Verhältniß.

4. Wenn bey dem geometrischen Verhältnisse beyde Glieder durch einerley Zahl multiplicirt werden, so werden sie zwar größer; aber das Verhältniß bleibt dasselbe, 4:8 multiplicirt mit 4 wird 16:32, welches dasselbe Verhältniß ist: denn ist 4 in 8, 2 mahl enthalten, so wird 4, 3 mahl genommen, eben so oft in 8, 3 mahl genommen, seyn müssen. Wird ein geometrisches Verhältniß durch einerley Zahl dividirt, so werden die Glieder zwar kleiner; allein das Verhältniß bleibt dasselbe: denn 12 und 24 durch 2 dividirt werden auf gleiche Art in 6 und 12 vermindert, und daher wird 6 in 12 gleichfalls 2 mahl enthalten seyn müssen, wie es 12 in 24 war.

XII. Will man nun ein Verhältniß construiren, das einem gegebenen gleich seyn soll, so suche man nur bey dem arithmetischen die Differenz (X.), und bey dem geometrischen den Exponenten (daselbst) von dem gegebenen. Wäre 8 — 10 gegeben, darnach ein gleiches zu construiren, so dürfte nur ein Verhältniß, dessen Differenz 2 wäre, construirt werden; z. B. 19 — 21, 52 — 54 und dergleichen unzählige mehr. Wäre von dem neuen das erste Glied schon gegeben, so müßte dazu das andre auf eben diese Art gesucht werden. Zu 16 sollte das andre Glied gesucht werden, das sich zu dieser Zahl wie 10 in dem Verhältnisse 5 — 10 verhielte, so wäre es 21. Denn die Differenz von 16 — 21 ist gleich der von 5 — 10. Wäre 21 — 27 gegeben, und das zweyte Glied eines Verhältnisses 19, wozu das erste construirt werden sollte, so wäre es 13; denn 13 — 19 wie 21 — 27.

Eben so verfahren wir mit dem geometrischen, vermittelst des Exponenten. Gesetzt: wir haben, 2 : 10, Exponent ist 5; ein gleiches Verhältniß wäre also 1 : 5, oder 4 : 20; 5 : 25 u. s. w. Wäre das erste Glied des neuen Verhältnisses wirklich gegeben, z. B. 11, so suchet die Zahl, die der 11 mit 5 multiplicirt gleich ist; das ist 55. So verhält sich 2 : 10 wie 11 : 55. Wäre das zweyte gegebene Glied 15, so wäre das erste 3, denn 5 mahl 3 ist 15 und 3 : 15 wie 2 : 10.

Von Proportionen.

XIII. Zwey gleiche Verhältnisse geben, wenn sie zusammengestellt werden, eine Proportion ab. Daher giebt es eine arithmetische Proportion, wo beyde Verhältnisse gleiche arithmetische; und eine geometrische, wo beyde gleiche geometrische Verhältnisse sind. Das Zeichen der Gleichheit = wird zwischen die gleichen Verhältnisse gesetzt. Die vier

Zahlen,

Zahlen, woraus die Proportion besteht, heißen nun das erste, zweyte, dritte und vierte Glied.

4 — 6 = 8 — 10 ist eine arithmetische Proportion: denn beyde Verhältnisse sind einander gleich. 4 differirt von 6, wie 8 von 10.

4 : 8 = 10 : 20 ist eine geometrische Proportion: denn beyde Verhältnisse sind einander gleich. Es ist 4 so oft in 8, wie 10 in 20 enthalten.

1. Man merke sich: das Zeichen =, welches zwischen die gleichen Verhältnisse gestellt wird, wird stets wie ausgesprochen; als 2 : 4 = 8 : 16. Das heißt: 2 verhält sich zu 4, wie 8 : 16 (sich verhält). Sonst spricht man es gewöhnlich aus: ist gleich, als 2 = 1 + 1, das ist, 2 ist gleich 1 + 1.

2. Begriffe, die man im gemeinen Leben mit dem Worte Proportion verbindet, muß man ganz von diesem Worte, wie es hier gebraucht wird, absondern, und sich blos an diese Erklärung halten.

XIV. Sobald zwey Verhältnisse in eine Proportion gebracht werden, so können keinesweges die Glieder in dem zweyten Verhältnisse willkührlich gestellt werden. Denn ist das erste Glied kleiner, als das zweyte, so muß das dritte auch wiederum kleiner, als das vierte, seyn. Und umgekehrt. Denn ich kann nicht sagen, 4 ist in 8 so oft enthalten, wie 20 in 10, welches absurd wäre. Oder 8 enthält 4 so oft, wie 10 die Zahl 20. Ich muß dahero sagen:

4 : 8 = 10 : 20, oder
8 : 4 = 20 : 10.

1. Findet sich eine Proportion in der Form, daß das erste Glied das kleinere ist, als 4 : 8 = 10 : 20, so nennt man die Glieder steigend; ist das erste das größere, als 8 : 4 = 20 : 10 so heißt sie fallend.

2. Uebri-

2. Uebrigens kann auch das zweyte Glied dem dritten gleich seyn, als 2:4 = 4:8. Auch kann das zweyte größer, als das dritte, seyn, als 4:8 = 3:6, indem diese Fälle mit der Gleichheit der Verhältnisse und der bisher gelehrten natürlichen Ordnung einer Proportion nicht streiten.

3. Die Hauptsache also, worauf man stets bey Anwendung der Proportionen sehen muß, ist, außer, daß Differenz und Exponent gleich sind, daß in jedem Verhältnisse die Glieder auf gleiche Art in Ansehung des Steigens oder Fallens, gestellt werden. Denn die Berechnung der Exempel der Regel de Tri (wozu man doch die geometrischen Proportionen gebraucht) kann nicht anders gründlich verrichtet werden, ohne daß die zu einem Exempel gehörenden Stücke in eine richtige geometrische Proportion gesetzt werden.

4. Wegen des Gebrauchs der geometrischen Proportion bey der Regel de Tri werden wir uns nur blos auf diese Art der Proportion einschränken.

5. Sind die Glieder einer Proportion benannt, so können alle vier Glieder von einerley Art seyn, auch einerley Namen führen. Z. B. 2 Rthlr.:4 Rthlr. = 16 Rthlr.:32 Rthlr. Oder 1 ℔ : 4 ℔ = 2 ℔ : 8 ℔. Diese Art von Proportionen kommt indessen in der Anwendung der Rechenkunst auf das gemeine Leben nicht leicht vor.

6. Es sind in den gewöhnlichen Fällen nur die Verhältnisse **unter sich** gleichartig, und gleichnamicht, z. B. 3 ℔ : 6 ℔ = 2 Rthlr.:4 Rthlr. Denn so wie 3 ℔ Farbe dem Gewichte nach in 6 ℔ zweymahl stecken, so sind auch 2 Rthlr. in 4 Rthlr. dem Werthe nach als Geld zweymal enthalten. Oder 10 Ellen Garn : 20 Ellen Garn = 1 ℔ : 2 ℔, weil 1 ℔ dem Gewichte nach eben so oft in 2 ℔ enthalten ist, als 10 Ellen der Zahl nach in 20 Ellen.

7. Hieraus folgt nun, daß in einer Proportion die beyden Verhältnisse, gegen einander gehalten, ganz ungleichartige Dinge enthalten, folglich auch ungleichnamicht seyn können: denn was steht der Wahrheit entgegen, daß, so wie 3 ℔ in 6 ℔, dem Gewichte nach, zweymahl stecken, so auch 2 Rthlr. in 4 Rthlr. dem Werthe, als Geld, nach, enthalten sind? Jedoch in einem und ebendemselben Verhältnisse müssen die Sachen von einerley Art seyn, wenn auch gleich die Namen verschieden seyn können, in sofern die Sachen selbst in Specie einander ungleich seyn können, wenn nur das Genus von einerley Art ist (IV. 2.).

8. Daher können in einer richtigen Proportion nicht allein zwey verschiedene Namen, als 3 ℔ : 6 ℔ = 2 Rthlr. : 4 Rthlr.; oder drey, als 4 Zntn. : 1 Zntn. = 2 Rthlr. : 12 ggl., sondern auch sogar vier verschiedene Namen vorkommen, als:

2 Wispel Hafer : $\frac{1}{2}$ Scheffel = 36 Rthlr. : 9 ggl.

Denn daß die Proportion richtig ist, folgt daher, 2 Wispel : $\frac{1}{2}$ Scheffel = 36 Rthlr. : 9 ggl. sind eben das, als $\frac{48}{2}$ Scheffel : $\frac{1}{2}$ Scheffel. = $\frac{288}{8}$ Rthlr. : $\frac{3}{8}$ Rthlr., weil von $\frac{1}{2}$ in $\frac{48}{2}$ der Exponent 96 und von 3 in 288 auch 96 ist; hiernächst verhalten sich Wispel zu Scheffel und Thaler zu Groschen als Genus und Species zu einander, welches man auch daraus sehen kann, daß sie in Brüche von gleichem Nenner gebracht werden können. Weil 2 Wispel : $\frac{1}{2}$ Schffl. gleich ist $\frac{48}{2}$ Schffl. : $\frac{1}{2}$ Schffl. und 36 Rthlr. : 9 ggl. gleich ist $\frac{288}{8}$ Rthlr. : $\frac{3}{8}$ Rthlr.

XV. Die Glieder einer geometrischen Proportion können mit einerley Zahl multiplicirt werden, und die Proportion bleibt doch dieselbe, so

2 : 4 = 6 : 12

multiplicirt mit 6

$\frac{6}{\quad} \; \frac{6}{\quad} = \frac{6}{\quad} \; \frac{6}{\quad}$

12 : 24 = 36 : 72

Hier

Hier ist 12 in 24, 2 mahl und 36 in 72, 2 mahl, folglich die neue Proportion dieselbe.

1. Man merke wohl: die Proportion bleibt dieselbe; nicht die Zahlen bleiben dieselben (XI.). Proportionen sind nämlich einander gleich, wenn ihre beyden Verhältnisse einerley Differenz, oder Exponenten haben.

2. Denn da die Verhältnisse an sich nicht verändert werden, wenn jedes Glied mit einerley Zahl multiplicirt wird (XI 4.), so werden zwey gleiche Verhältnisse, das ist, eine Proportion, auch nicht verändert werden, wenn alle Glieder mit ein und eben derselben Zahl multiplicirt werden.

3. Werden die beyden ersten Glieder mit einerley Zahl multiplicirt, oder dividirt, so können die beyden letztern stehn bleiben; sie machen dennoch mit den erstern hernach dieselbe Proportion aus.

2 : 4 = 6 : 12
× 2 2

4 : 8 = 6 : 12, oder
2 : 4 = 6 : 12
: 2 2

1 : 2 = 6 : 12

denn es kommt ja nur darauf an, daß der Exponent derselbe bleibt, welches hier geschieht (XI. 4.). Eben daher kann ein jedes Verhältniß mit einer besondern Zahl multiplicirt werden, die neue Proportion ist der vorigen doch gleich.

2 : 4 = 8 : 16
× 3 3 2 2

6 : 12 = 16 : 32.

XVI. Wird in der geometrischen Proportion das erste Glied mit dem vierten multiplicirt, so ist das

entstehende Product demjenigen gleich, welches entstehet, wenn das zweyte mit dem dritten multiplicirt wird. So

$$2 : 4 = 6 : 12.$$
$$2 \times 12 = 4 \times 6 = 24.$$

Denn das zweyte Glied ist (VIII.) nichts anders, als das Product des ersten Gliedes mit dem Exponenten, und das vierte nichts anders, als das Product des dritten Gliedes mit dem Exponenten. Wird also das erste und vierte Glied mit einander multiplicirt, so ist es eben das, als wenn das erste, dritte und der Exponent mit einander multiplicirt werden. Wird das zweyte mit dem dritten multiplicirt, so ist es eben das, als wenn das erste, der Exponent und das dritte mit einander multiplicirt werden. In beyden Fällen werden also einerley Factoren mit einander multiplicirt, die einerley Product geben müssen, wobey die verschiedene Ordnung, darin die Factoren stehen, nichts thut (3. Cap. XI. 7.).

XVII. Sind aus einer geometrischen Proportion die drey ersten Glieder gegeben, so erhält man das vierte, wenn man das zweyte und dritte Glied mit einander multiplicirt und das Product durch das erste dividirt. Der Quotient ist das vierte Glied. Z. B. Es sind die drey ersten Glieder gegeben $2 : 8 = 3 : x$. (So lange das vierte Glied unbekannt ist, bezeichnen wir es stets durch x) so ist $8 \times 3 = 24$ und durch 2 dividirt $= 12$ und folglich 12 das vierte Glied.

1. Von dem ersten Verhältnisse ist der Exponent 4 und $3 \times 4 = 12$ als das vierte Glied, folglich ist 12 das wirkliche vierte Glied.

2. Weil das Product des zweyten und dritten Gliedes gleich ist dem des ersten und vierten (XVI.), so erhält man wirklich das Product des ersten und vierten Gliedes, indem man das vom zweyten und dritten bekommt. Das

erste

erste und vierte Glied sind also die Factoren, woraus das nun schon bekannte Product als entstanden anzusehen ist. Nun ist das erste Glied, und folglich der eine Factor bekannt. Wenn mit diesem also in das Product dividirt wird, muß der andere herauskommen (3. Cap. XII. 3.), folglich gilt jenes Verfahren für alle Fälle.

3. Würde das Product des zweyten und dritten Gliedes so groß nicht seyn, daß darin mit dem ersten Gliede ordentlich dividirt werden könnte, so setzet den Quotienten als einen Bruch an, welcher denn das vierte Glied ist. Z. B. $4:3=1:x$, ist $=\frac{3}{4}$, denn $3 \times 1=3$ und 3 dividirt durch $4=\frac{3}{4}$ (4. Cap. VII. 3.).

4. Man kann daher in allen Fällen auf diese Art das vierte unbekannte Glied einer geometrischen Proportion herausbringen. Dieses würde zwar auch erhalten werden, wenn man (nach Nr. 1. ingl. XI.) den Exponenten des ersten und zweyten Gliedes aufsuchte und mit demselben das dritte Glied multiplicirte, wenn die Proportion steigend wäre, oder darin dividirte, wenn sie fallend wäre; indessen erhält man das vierte Glied auf die jetzt gelehrte Art geschwinder.

5. Wird ein Verhältniß in einer Proportion durch einerley Zahl dividirt, so werden die Glieder kleiner; die Proportion aber wird nicht verändert (XV. 3.). Wird nun diese Division in den beyden erstern Gliedern vorgenommen, so hat man den Vortheil, daß man mit kleinern Zahlen multiplicirt und dividirt. Z. B. das vorige

Exempel: $2:8=3:x$

Das erste Verhältniß durch 2 divid. $=1:4=3:x$

$\frac{3}{12}$ das 4te Glied, wie vorhin.

Ingleichen $14:21=8:x$

dividirt mit 7 $=2:3=8:x$

$\frac{3}{24}\,|\,{}^{2}_{12}$ das 4te Glied

statt 21
168 8)
14 | 14/12 das vierte Glied.
28

Es versteht sich, daß man an dem dritten Gliede nichts ändert, wenn zu ihm das vierte gesucht wird.

6. Weil auch die Proportion dieselbe bleibt, wenn die Glieder eines Verhältnisses durch einerley Zahl multiplicirt werden, so kann man auch die beyden ersten Glieder einer Proportion mit einerley Zahl multipliciren, welches zuweilen das Multipliciren und Dividiren erleichtert.

XVIII. Die Aufgabe, aus den gegebenen drey ersten Gliedern einer geometrischen Proportion das vierte unbekannte zu finden, ist der eigentliche Gegenstand der so genannten Regel de Tri. Man stellt nämlich, wenn man dabey recht verfährt, die gegebenen Glieder stets so, daß das unbekannte das vierte Glied wird, welches man alsdann stets richtig erhalten muß. Bey dieser Verfahrungsart kommt man unter Beobachtung einiger ganz wenigen in der Natur des Verhältnisses und der Proportion liegenden Puncte, ohne eine einzige Ausnahme zu machen, stets durch, und bedarf der vielen Regeln und Ausnahmen nicht, welche so viele, selbst neue und gute Rechenbücher, den Anfängern immer noch, und oft zu ihrer Verwirrung, ertheilen.

1. Sind die Glieder benannt, so kann das gefundene vierte Glied keine andere Benennung bekommen, als das dritte hatte: denn das vierte Glied hat eine völlige Beziehung auf das dritte, und muß, sobald es eine Benennung erhält, mit ihm gleichartig seyn (XIV. 7.). Seine Beziehung auf das erste und zweyte Glied besteht blos in dem allgemeinen Verhältnisse der Zahlen, indem sich nur die Zahl des vierten Gliedes so zu der Zahl des dritten verhält, als sich die Zahl des zweyten Gliedes zu

der Zahl des ersten verhält. Folglich hätten wir:
2 ℔ : 4 ℔ = 4 ggl. : x

4
2 : 16 | 8. so würde das gefundene vierte Glied 8 hier 8 ggl. seyn. Oder:
8 ℔ : 2 ℔ = 3 Rthlr. : x

2
8 : 6 | $\frac{6}{8}$, welches hier $\frac{6}{8}$ Rthlr. seyn müssen.

2. Wenn von der Proportion:
4 Ell. : 8 Ell. = 6 Rthlr. : 12 Rthlr.
die drey ersten Glieder gegeben, das vierte aber unbekannt wäre, so würde hier also 8 × 6 = 48 dividirt durch 4 = 12, zu dem vierten Gliede 12 angeben, welches Thaler seyn müßten, weil 8 im dritten Gliede Thaler waren. Hierbey widerspricht es dem Cap. 5. VI. Gelehrten nicht, daß hier 8 Ellen mit 6 Rthlr. multiplicirt werden, welches an sich freylich nicht möglich ist; sondern man betrachtet, nachdem die Glieder vermittelst ihrer Namen recht geordnet sind, die Zahlen nun als unbenannte Zahlen, indem man nicht den Namen von Ellen, oder Thalern, sondern die Zahl herausbringen will, die zu 6 eben das Verhältniß hat, was 8 zu 4 hat, welches man auf diese Art ganz richtig erhält. Daß aber die gefundene 12 hier Thaler, und nicht Ellen sind, ergiebt sich daraus, weil das dritte Glied aus Thalern besteht.

XIX. Sind in den gegebenen 3 Gliedern einer geometrischen Proportion Brüche, so verfährt man nach den bey den Bruchrechnungen ertheilten Regeln, so wohl überhaupt, als auch nach allen den dabey statt findenden Abkürzungen und Erleichterungen.

1. Es hat das erste Glied einen vermischten Bruch:
$4\frac{1}{2} : 6 = 10 : x$

Verwandelt den vermischten Bruch in einen unächten:
$\frac{9}{2} : 6 = 10 : x$, weil aber hier 9:6 sich nicht verhält,

wie $4\frac{1}{2}:6$, indem 9 nur Hälften sind, so machet das zweyte Glied zu einem unächten Bruch gleiches Namens:

$\frac{9}{2} : \frac{12}{2} = 10 : x$ oder nun

$9 : 12 = 10 : x$

$\frac{10}{120} \quad \frac{9}{13\frac{3}{9}}$

Es ist $13\frac{3}{9}$ das wirkliche vierte Glied: denn es ist zwar mit 9 dividirt, statt $4\frac{1}{2}$, und es würde also der Quotient mit 2 müssen multiplicirt werden (4. Cap. XXXVII. 9.), allein es ist schon 10 mit 12, statt 6, multiplicirt, und es bleibt daher $13\frac{3}{9}$ unverändert.

2. Wäre das erste Glied ein bloßer ächter Bruch, so wäre das zweyte Glied in einen unächten gleiches Namens zu verwandeln.

$\frac{3}{4} : 5 = 7 : x$, d. i.

$\frac{3}{4} : \frac{20}{4} = 7 : x \quad 20$

$\frac{7}{140} \quad \frac{3}{46\frac{2}{3}}$

In diesen Fällen blieb also das dritte Glied unverändert, und der zuletzt gefundene Quotient war das wirkliche vierte Glied.

3. Ist das zweyte Glied ein (ächter oder vermischter) Bruch, das erste kein Bruch, so verwandelt das erste gleichfalls in einen gleiches Namens, wie vorhin mit dem zweyten geschahe. Alles ganz, wie vorher, aus den vorhergehenden Gründen.

$2 : 1\frac{3}{5} = 3 : x$, d. i.

$\frac{10}{5} : \frac{8}{5} = 3 : x = 8$

$\frac{3}{24} \quad \overset{10}{\smile} \; \frac{}{2\frac{2}{5}}$

4. Sind

4. Sind die beyden ersten Glieder Brüche gleiches Namens, so sehet sie an, als gleiche Zahlen

$$\frac{2}{8} : \frac{5}{8} = 6 : x,$$

d. i. $2 : 5 = 6 : x$

$$2 : 30 \mid 15 = x.$$

Ist dabey ein vermischter Bruch, so macht ihn zu einem unächten, als:

$$\frac{2}{3} : 4\frac{1}{3} = 9 : x, \quad \text{d. i.}$$

$$\frac{2}{3} : \frac{13}{3} = 9 : x = 13$$

$$\frac{9}{117} \Big|^{2} 58\frac{1}{2}$$

Der Grund liegt von dem erstern Falle darin, daß $\frac{2}{8}$ sich zu $\frac{5}{8}$ wie 2 zu 5 verhalten; in dem letztern, daß $\frac{2}{3}$ sich zu $4\frac{1}{3}$ wie 2 zu 13 verhalten.

5. Sind die beyden ersten Brüche von verschiedenen Nennern, so bringet sie erst unter einerley Nenner, ehe ihr weiter verfahret; hernach ganz, wie vorhin, als

$$1\frac{2}{3} : 4\frac{1}{2} = 4 : x, \text{ d. i.}$$

$$\frac{5}{3} : \frac{9}{2} = 4 : x, \quad \text{und folglich:}$$

$$\frac{10}{6} : \frac{27}{6} = 4 : x \quad 108 \mid 10\frac{4}{5}$$

6. Bey großen Zahlen ist dies etwas umständlich, weil man zu große Zahlen erhält. Multiplicirt daher den unächten Bruch $\frac{9}{2}$ mit dem dritten Gliede 4 und dividirt das Product 36 durch den unächten Bruch des ersten Gliedes 5, $= 7\frac{1}{5}$, hierauf dividirt den Quotienten $7\frac{1}{5}$ mit 2, dem Nenner des zweyten Gliedes $= 3\frac{3}{5}$ und diesen Quotienten multiplicirt mit dem Nenner des ersten Bruches $3 = 10\frac{4}{5}$.

Denn ward 9 mit 4 multiplicirt, so ward das Product um einmahl zu groß, weil 9 hier Hälften waren, daher mußtet ihr mit 2 den Quotienten hernach dividiren. Und da ihr mit 5 dividirtet, da es doch nur 5 Drittel waren, so ward der Quotient zuletzt um $\frac{1}{5}$ zu klein und ihr mußtet es folglich mit 3 zuletzt multipliciren.

7. Ihr konntet auch, um kürzer zu verfahren, gleich 9 mit 4 und das Product 36 mit 3 multipliciren = 108 und dies Product mit 5 × 2 = 10 dividiren = $10\frac{4}{5}$. Denn weil zuletzt mit 5, statt mit $\frac{1}{5}$, dividirt werden müßte, so wird gleich das Product des zweyten und dritten Gliedes mit 3 multiplicirt (dadurch wird die 5 in $\frac{5}{3}$ eine ganze Zahl = 5), und da wir die 9 als ganze Einheiten ansahen, da es doch nur Hälften sind, so wird gleich der Divisor 5 mit 2 multiplicirt, so muß man in $10\frac{4}{5}$ das vierte Glied erhalten.

8. Besteht das dritte Glied aus einem Bruche, das erste und zweyte aus ganzen Zahlen, so verfahret mit dem Zähler dieses Bruches als mit einer ganzen Zahl. Die andern beyden Glieder laßt unverändert, als:

$$2 : 4 = \tfrac{3}{4} : x$$

$$\frac{3}{12} \quad \begin{matrix} 2 \\ | \\ 6 \end{matrix}$$

Hier ist 6 das vierte Glied; da aber das dritte Glied nicht 3, sondern $\frac{3}{4}$, und es also bey der Rechnung um viermahl zu groß angenommen ist, so ist also der erhaltene Quotient um viermahl zu groß und also nicht 6, sondern $\frac{6}{4} = 1\frac{1}{2}$.

Ist das dritte Glied ein vermischter Bruch, so macht ihn zu einem unächten und verfahret, wie vorhin, als:

$$3 : 4 = 1\tfrac{2}{4} : x$$

$$\text{d. i. } 3 : 4 = \tfrac{6}{4} : x = 24 \begin{matrix} 3 \\ | \\ \end{matrix} \tfrac{8}{4}$$

Wäre nun da: $3 : 5 = 1\frac{3}{4} : x$,

so wäre $3 : 5 = \frac{7}{4} : x = 35 \begin{matrix} 3 \\ | \\ \end{matrix} 11\frac{2}{3}$.

Das erhaltene vierte Glied $11\frac{2}{3}$ sind demnach $\frac{11}{4}$ und $\frac{2}{3}$ von $\frac{1}{4}$, folglich $2\frac{3}{4} + \frac{2}{3}$ von $\frac{1}{4}$, d. i. $1\frac{2}{12}$, folglich das ganze vierte Glied $2\frac{3}{4} + 1\frac{2}{12} = 2\frac{11}{12}$.

9. Man kann aber der Umstände, wie hier, erst den gebrochnen Bruch zu einem ächten zu reduciren und dann zu dem vorhandenen zu addiren (obgleich dem, der mit

Brüchen

Brüchen umzugehen weiß, dieß keine Mühe ist), auf verschiedene Art überhoben seyn.

10. Um nämlich kürzer zu verfahren, macht das dritte Glied zu einem unächten Bruche $= \frac{7}{4}$, dann multiplicirt es mit dem zweyten Gliede, $= 35$, darauf multiplicirt das erste Glied mit dem Nenner des dritten $4 = 12$ und nun dividirt mit diesem Producte in das Product des zweyten und dritten Gliedes $= 2\frac{1}{12}$, d. i.:

$$\begin{array}{rcl} 3 & : & 5 = 1\frac{3}{4} : x \\ 3 & : & 5 = \frac{7}{4} : x \\ \underline{4} & : & \underline{7} \\ 12 & : & 35 \mid 2\frac{1}{12} \end{array}$$ das vierte Glied.

Denn, weil 7 hier als Ganze angesehen werden, da es doch nur Viertel sind, so x wird um 4 mahl zu groß; wird nun der Divisor 3 gleich mit 4 multiplicirt, so wird durch den viermahl zu großen Divisor dieses wieder berichtigt, und der gebrochne Bruch vermieden.

11. Wäre auch das zweyte und dritte Glied (oder eines davon) ein Bruch, so verfahret, wie jetzt bemerkt ist, außer, daß ihr das erste mit dem zweyten Gliede (nach der vorhin gegebenen Anweisung) erst zu Brüchen von einerley Nenner machet,

$3 : 5\frac{1}{2} = 1\frac{3}{4} : x$ d. i.

$\frac{6}{2} : \frac{11}{2} = \frac{7}{4} : x = 11 \times 7 = 77 \mid 3\frac{5}{24}$ (24)

Denn durch die Multiplication der 5 mit 2, ward zwar $5\frac{1}{2}$ in 11 verwandelt, und um einmahl zu groß, dafür ward aber auch der Divisor 3 in 6 verwandelt, und auch nun einmahl größer gemacht, als vorher. Es mußte aber nun noch 6 mit 4 multiplicirt werden: denn sonst hätten wir in x blos Viertel und einen gebrochenen Bruch erhalten, der erst zu einem ordentlichen hätte reducirt und dann zu dem Quotienten addirt werden müssen, nämlich:

$3 : 5\frac{1}{2} = 1\frac{3}{4} : x$ (6) das wäre

$\frac{6}{2} : \frac{11}{2} = \frac{7}{4} = 77 \mid 12\frac{5}{6}$, welches

$\frac{12}{4} = 3$ und $\frac{5}{6}$ von $\frac{1}{4}$ wäre $= \frac{5}{24}$, das ist aber $3\frac{5}{24}$, wie vorhin.

12. Ist das dritte und erste Glied ein Bruch, so machet das zweyte zu einem unächten von gleichem Namen mit dem ersten Gliede und verfahrt dann weiter, wie vorhin.

$2\frac{1}{3} : 4 = 5\frac{1}{2} : x$, d. i.

$\frac{7}{3} : \frac{12}{3} = \frac{11}{2} : x = 132 \mid 9\frac{3}{7}$.

Die Gründe sind ganz die vorigen.

13. Wäre das dritte Glied so klein, daß es mit dem zweyten kein Product ausmachte, in welchem das erste ganz enthalten wäre, so drücket die Division des ersten in dieses Product als einen ächten Bruch aus:

$2\frac{1}{3} : 2 = \frac{1}{2} : x$, d. i.

$\frac{7}{3} : \frac{6}{3} = \frac{1}{2} : x = \frac{3}{7}$.

Denn $6 \times 1 = 6$ und $7 \times 2 = 14$; nun 6 dividirt durch 14 ist $= \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$.

14. Sind alle drey Glieder Brüche, und zwar von gleichem Nenner, so behandelt die Zähler als ganze Zahlen, nachdem ihr die Brüche zu unächten gemacht habt; es wird alsdann x ein Bruch von dem Nenner, als das dritte Glied hatte:

$1\frac{2}{3} : 7\frac{1}{3} = 2\frac{1}{3} : x$, d. i.

$\frac{5}{3} : \frac{22}{3} = \frac{7}{3} : x = 154 \mid \frac{30}{3} + \frac{4}{5}$ von $\frac{1}{3}$

welches $10\frac{4}{15}$ sind.

Oder, um den gebrochnen Bruch zu vermeiden, der hier gewöhnlich entsteht, multiplicirt (10.) gleich die 5 des ersten Gliedes mit dem Nenner des dritten Gliedes $3 = 15$ und dividirt damit in $154 = 10\frac{4}{15}$ wie vorhin, aus vorigen Gründen.

15. Wäre der Bruch des dritten Gliedes von ungleichem Nenner mit dem ersten und zweyten, diese aber von gleichen, so machet, wenn vermischte Brüche vorhanden sind, diese zu unächten; das übrige Verfahren ist das vorige.

$\frac{2}{3} : 1\frac{1}{3} = \frac{4}{5}$. d. i.

$\frac{2}{3} : \frac{4}{3} = \frac{4}{5} : x = 16 \mid 1\frac{3}{5}$.

16. Ist

16. Ist das erste und zweyte Glied ein Bruch von verschiedenen Nennern, oder sind alle drey Glieder von verschiedenen Nennern, so bringet die beyden ersten zu einerley Nenner, dann multiplicirt das zweyte Glied mit dem dritten, und ist der Nenner des dritten mit dem ersten Gliede multiplicirt worden, so dividirt mit diesem Producte in das erstere Product.

$2\frac{1}{2} : 3\frac{1}{4} = 1\frac{1}{5} : x$, d. i.
$\frac{5}{2} : \frac{13}{4} = \frac{6}{5} : x$, oder
$\frac{20}{8} : \frac{26}{8} = \frac{6}{5} : x = 156 \overset{100}{|} 1\frac{1}{2}\frac{4}{5}$.

17. Wollten wir die beyden ersten Glieder nicht erst unter einerley Nenner bringen, so könnten wir so rechnen:

$13 \times 6 = 78 \overset{25}{|} 3\frac{3}{2\,5} \times 2 = 6\frac{6}{2\,5} \overset{4}{|} 1\frac{1}{2}\frac{4}{5}$, denn 13 und 6 wurden als ganze Zahlen mit einander multiplicirt; weil aber 6 nur Fünftel waren, so ward der Divisor gleich auch fünfmahl größer gemacht = 25 und damit in das Product = 78 dividirt; der Quotient $3\frac{3}{2\,5}$ war noch um zweymahl zu klein: denn die 5 im ersten Gliede waren nur halbe, nicht ganze Zahlen, daher ward $3\frac{3}{2\,5}$ mit 2 multiplicirt, gab $6\frac{6}{2\,5}$. Der auf diese Art erhaltene Quotient war aber noch um 4 mahl zu groß, weil das zweyte Glied 13, als ganze Zahlen angesehen waren, da es nur Viertel waren, deswegen ward noch mit 4 in $6\frac{6}{2\,5}$ dividirt, 4 in $6 = 1\frac{1}{2}$ und 4 in $\frac{6}{2\,5} = \frac{6}{10}$, folglich ward Quotient $1\frac{1}{2} + \frac{6}{10} = 1\frac{5}{10}\frac{6}{0} = 1\frac{1}{2}\frac{4}{5}$, wie vorhin.

18. Weil $3\frac{3}{2\,5}$ mit 2 multiplicirt und hernach das Product mit 4 dividirt ward, so konnte gleich $3\frac{3}{2\,5}$ mit 2 dividirt werden, gab $1\frac{1}{2} + \frac{3}{5}\frac{}{0}$, $= 1\frac{2}{5}\frac{8}{0} = 1\frac{1}{2}\frac{4}{5}$, wie vorhin.

19. Ist das Product des zweyten und dritten Gliedes so klein, daß mit dem ersten nicht hinein dividirt werden kann, so drückt man es hier gleichfalls als einen wahren Bruch aus:

$5\frac{1}{4} : \frac{1}{3} = 2\frac{1}{2} : x$, d. i.

$2\frac{1}{4} : \frac{1}{3} = \frac{5}{2} : x$, oder

$6\frac{3}{2} : 4\frac{1}{2} = \frac{5}{2} : x$. d. i.

$20 \mid^{126} = \frac{20}{126} = \frac{10}{63}$.

XX. Bey den geometrischen Proportionen kann ich nicht allein sagen: wie das erste Glied sich zum zweyten verhält, so verhält sich das dritte zum vierten; sondern auch: Wie sich das erste zum dritten Gliede verhält, so verhält sich das zweyte zum vierten,
daher: $2 : 4 = 8 : 16$, oder
$2 : 8 = 4 : 16$. Denn da 16 aus 8×2 und 4 aus 2×2 entstanden ist, und folglich 16 und 4 Producte von 2 und 8 mit einerley Factoren, nämlich 2 sind, so müssen sich diese Producte zu einander so, als diese beyden Factoren 2 und 4 verhalten, folglich:

$2 : 8 = 4 : 16$.

XXI. Werden zwey geometrische Proportionen über einander gestellt, und die gleichnamichten Glieder (die ersten Glieder in beyden Proportionen, ingleichen die zweyten ꝛc. heißen hier unter sich gleichnamicht), mit einander multiplictrt, so geben die Producte wiederum eine geometrische Proportion.

$2 : 4 = 5 : 10$
$1 : 3 = 4 : 12$
$2 : 12 = 20 : 120$

1. Die Probe zeigt es hier, daß die Producte eine wahre Proportion geben: denn 2 in $12 = 6$; 20 in $120 = 6$.

2. Die obern Glieder würden keine Proportion geben, wenn die untern Zahlen wären, die in keiner Proportion stünden. Da aber die obern durch Factoren multiplicirt werden, die in einer Proportion unter sich stehen, so muß

eine

eine neue Proportion stehen, welche aber einen andern Exponenten haben muß, als die obern und untern Glieder haben.

3. Da in der ersten Proportion der Exponent 2, und in der andern 3 ist, so wird das Product der zweyten Glieder mit einander um 3 × 2, d. i. 6 mahl größer seyn, als das Product der ersten Glieder unter einander, daher müssen diese Glieder in der neuen Proportion zum Exponenten 6 haben. Eben so, weil die vierten Glieder in den beyden Proportionen zu dem dritten sich, wie die zweyten zu den ersten verhalten, wird das Product der vierten Glieder, das Product der dritten sechsmahl in sich enthalten, der Exponent des dritten und vierten Gliedes in der neuen Proportion gleichfalls 6, und folglich diese eine wahre Proportion seyn müssen.

4. Der Exponent der so entstehenden neuen Proportion ist daher stets das Product der Exponenten der schon vorhandenen Proportionen.

5. Daher muß dieses auch von so vielen Proportionen gelten, als man nur auf diese Art über einander stellen will:

1	:	2	=	3	: 6
2	:	6	=	5	: 15
3	:	12	=	4	: 16
6	:	144	=	60	: 1440.

6. Hier ist in der ersten Proportion der Exponente = 2; in der zweyten = 3; in der dritten 4; folglich der Exponente der neuen Proportion gleich 2 × 3 × 4 = 24.

7. Aus den vorigen Gründen erhält man bey der aus zusammengesetzten Proportionen entstandenen Proportion das vierte Glied, wie bey der einfachen. Wenn nämlich das dritte Glied der zusammengesetzten durch das zweyte multiplicirt und dies Product durch das erste dividirt wird, so erhält man das vierte.

8. Eben das muß man erhalten, wenn man die einzelnen zweyten und dritten Glieder mit einander multiplicirt und sie durch das Product der erstern Glieder dividirt, als in dem letztern Exempel:

$12 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 8640$ und $8640 \mid \frac{6}{1440}$,

welches das vierte Glied ist.

9. So wie man bey einzelnen Proportionen durch die Division der ersten Glieder vermittelst einer und eben derselben Zahl die Multiplication und Division vermindern kann (XV. 3.), so kann dies auch bey mehrern Proportionen geschehen. Z. B.

$$\begin{array}{rcl} 2 : 4 & = & 3 : 6 \\ 4 : 12 & = & 1 : 3 \\ \hline 8 : 48 & = & 3 : 18 \end{array}$$

Nämlich in dem ersten und zweyten Gliede ist 4 ein und eben derselbe Factor; ich kann ihn also aus beyden Gliedern weglassen, so heißt das erste Glied 2, das andere 12, und es ist, als wenn die Producte des ersten und zweyten Gliedes durch 4 dividirt wären. (3. Cap. XIII. 3.). Nun heißt die neue Proportion

$2 : 12 = 3 : \times$

$\frac{3}{36} \mid 2$ 18 das vierte Glied.

10. Hier könnte ich diese Verkleinerung noch weiter treiben: 2 und 12 durch 2 dividirt geben 1 und 6, folglich wären die Glieder der neuen Proportion:

$1 : 6 = 3 : \times$

$\frac{3}{18}$ das vierte Glied.

11. Es kann auch die Verkleinerung bey den dritten Gliedern vorgenommen werden: denn da diese bey der Auffindung des vierten Gliedes mit den zweyten Gliedern multi-

multiplicirt werden, so sind diese Glieder zusammen als Factoren anzusehn (3. Cap. XIII. 3.). Z. B.

1 : ~~2~~ = ~~6~~ : 12
~~6~~ : 3 = 2 : 1 (Die durchgestrichnen Zahlen
~~2~~ : 4 = 8 : 16 sind durch die Division aufgehoben.)

1 : 12 = 16 6)
96 2)
192 das vierte Glied.

12. Es ist aber wohl zu bemerken, daß nur in dem ersten Gliede auf der einen, und dem zweyten oder dritten Gliede, auf der andern Seite die Aufhebung vorgenommen werden kann. Z. B. falsch wäre es in dem ersten Gliede die 2, und in dem zweyten und zugleich dritten Gliede auch die 2 auszustreichen. Das würde heißen: das erste Product mit 2 und das folgende mit 4 dividiren.

13. Allein hätten wir ~~2~~ : 1 = ~~4~~ : 2
~~2~~ : 6 = 3 : 9

6 3
3

18 das vierte Glied,

so konnten mit Recht beyde 2 in dem ersten Gliede gegen 4 in dem dritten ausgestrichen werden.

14. In den Proportionen:

2. ~~6~~ : 3. ~~9~~ = 4 : 6
1 : 2 = 4 : 8

2 : 6 = 16
96 6)
48 das vierte Glied.

Ward 6 durch 3 dividirt und der Quotient 2, statt der 6, neben ihr gesetzt. 9 ward auch durch 3 dividirt und der Quotient 3 neben ihr gesetzt. Hier hätten wir noch bey den Producten statt:

2 : 6 = 16 : x setzen
können 1 : 3 = 16 : x

3
48 das Gesuchte.

XXII. Sind mehrere Proportionen von der Art, daß das vierte Glied der ersten dem dritten der zweyten; das vierte der zweyten dem dritten der dritten; das vierte der dritten dem dritten der vierten u. s. f. gleich ist, so erhält man das vierte Glied der letzten Proportion allein, wenn man die sämmtlichen zweyten Glieder mit dem dritten der ersten Proportion multiplicirt, und das Product durch das Product der ersten Glieder dividirt.

2 : 4 = 3 : ϕ
1 : 3 = ϕ : x8
4 : 8 = x8 : x

8 : 8 × 4 × 3 × 3 = 288 | 8
36 = dem vierten Gliede der dritten Proportion.

1. Die gleichen dritten und vierten Glieder haben wir hier durchstrichen.

2. Man würde das Product aller vierten Glieder finden, wenn man die zweyten und dritten mit einander multiplicirte, und durch das Product der ersten dieses Product dividirte. Da nun von den vierten Gliedern allein 18 und 6 vorhanden, diese aber den beyden 18 und 6 von den dritten Gliedern gleich sind, so wird man x allein erhalten müssen, wenn man blos das dritte Glied der ersten Proportion 3 mit den zweyten Gliedern multiplicirt, und dies Product durch das Product der erstern Glieder dividirt. (3. Cap. XIII. 3.)

3. Man kann hier alle die Abkürzung noch anbringen, von der vorhin (XVI. 9. 10. 11.) geredet wurde, also:

2 :

2 : 4 = 3 : 6
1 : 3 = 6 : 18
4 : 8 = 18 : x

2 : 24 ⋈ 3 = 72 | 36 = dem vierten Gliede der dritten Proportion.

4. Es kann auch diejenige Art von Abkürzung angebracht werden, daß, wenn gleich nicht zwey gleiche Zahlen sich gegen einander aufheben und folglich weggelassen werden können, man doch diese durch andere in ihnen aufgehende dividiren und die Quotienten an ihre Stelle setzen kann (XXI. 14.). Als:

1 : 2 = 3 : 6
1. 3. 9 : (1) 3 = 6 : 2
1. 4 : (4) x6 = 2 : 8
3 : 2. 6 = 8 : x

wo 3 im ersten Gliede gegen 3 im dritten aufgeht, und folglich durchstrichen wird; ferner 9 im ersten und 3 im zweyten wird verwandelt in 3 und 1 und diese Quotienten dabey geschrieben; endlich 4 und 16 in 1 und 4, und die aus der 9 erhaltene 3 durch 3 dividirt, giebt 1, und die 6 im zweyten damit dividirt, giebt 2, so ist von den zweyten und dritten Gliedern blos 2 ⋈ 4 ⋈ 2 = 16; vom ersten nichts, folglich ist 16 das letzte Glied der vierten Proportion.

Ingleichen:

1 : 2 = 2 : 4
2 : 6 = 4 : 12
4 : (2) 8 = 12 : x

— 6 ⋈ 2 ⋈ 2 = 24,

hier ist das Product 24 das letzte Glied der letzten Proportion.

XXIII. Es ist einerley, ob stets das vierte Glied bey solchen Proportionen dem dritten in der folgenden, oder dem zweyten, in derselben gleich sey. In diesem Falle muß man, wenn man die sämmtlichen dritten Glieder mit dem zweyten der ersten Proportion multiplicirt und durch das Product der erstern Glieder dieses dividirt, eben so das vierte Glied der letztern Proportion erhalten, als:

1 : 2 = 2 : 4
2 : 4 = 6 : 12
4 : 12 = (2) 8 : x

— 6 × 2 × 2 = 24, wie vorhin.

1. Hier mußte nämlich eben so 2, 2, 6, 8 mit einander multiplicirt, und durch 2 × 4 dividirt werden, oder da 2 in 2 aufgeht, und 4 in 8 gleich 1 in 2 ist, so fällt der Divisor ganz weg, und es wird blos 2, 2, 6 mit einander dividirt, = 24. Oder, da die dritten Glieder mit den zweyten multiplicirt werden müssen, so ist es einerley, ob jene Zahlen, die den vierten Gliedern gleich sind, unter den zweyten, oder dritten Gliedern stehn.

2. In diesen letztern Lehrsätzen und Verfahrungsarten liegt der ganze Grund der Verfahrungsart bey der so genannten Kettenrechnung und den Abkürzungen, die man dabey anzubringen pflegt.

Das zehnte Capitel.

Von der Regel de Tri.

I. Der Fall, daß alle vier Glieder einer geometrischen Proportion Dinge einer Art sind (Cap. 9. XIV. 5.), trägt sich im bürgerlichen Leben nicht leicht zu.

II. Desto öfter geschieht es, daß eine geometrische Proportion von zweyerley verschiedenen Dingen vor-

handen

handen ist, so, daß sich die Glieder des zweyten Verhältnisses zu einander, wie die im ersten, verhalten.

III. In diesem Falle sind die Glieder des ersten Verhältnisses allemahl als ein Maaß vorhanden, das heißt: sie bestimmen die Glieder des zweyten Verhältnisses. Es kommen nun aber ungemein viele Dinge, als Arten dieses Maaßes im bürgerlichen Leben vor. Wir wollen nur die vorzüglichsten berühren, um bey den vorkommenden Fällen uns desto eher finden zu können.

1. Die Schwere der Dinge (z. B. Waaren) als ein Maaß, welches den Preis derselben an Gelde bestimmt. Ich nehme hier an: so wie sich eine Quantität durch Gewicht bestimmter Waare zu einer andern eben durch Gewicht bestimmten verhält, so verhält sich der Preis der ersten an Gelde zu dem Preise der letztern an Gelde. Folglich kann ich sagen: wie sich verhalten 2 ℔ Zucker zu 4 ℔ Zucker, so verhalten sich 16 ggl. zu 32 ggl.

2. Die Länge der Dinge (als Waaren ꝛc.), als ein Maaß, welches ihren Preis an Gelde bestimmt, wo es eben so heißt: wie sich eine nach Längenmaaß angegebene Waare zu einer andern, gleichfalls nach Längenmaaße angegebenen, verhält, so verhält sich der Preis der erstern zu dem Preise der letztern. Zwey Ellen Taffet verhalten sich zu 6 Ellen, wie 3 Rthlr. zu 9 Rthlr.

Es wird bey solchen Fällen durchaus vorausgesetzt, daß sich der Preis der Waare stets nach diesem angegebenen Maaße derselben richte, daß z. B., wenn die Waare nach ihrem Maaße verdoppelt wird, der Preis auch verdoppelt werde, und überhaupt in eben dem Maaße steige, oder falle, als die Waare nach ihrem Maaßstabe steigt, oder fällt.

3. Der körperliche Inhalt der Dinge, als ein Maaß ihres Werthes an Gelde, als: 1 Orthof Wein

verhält sich zu 2 Orthof Wein, wie 50 Rthlr. zu 100 Rthlr. Oder:

24 Scheffel Weizen verhalten sich zu 1 Scheffel Weizen, wie 48 Rthlr. zu 2 Rthlr..

4. Die Zeit, als ein Maaß der Dinge in verschiedener Hinsicht, z. B. auf das, was darinnen entstehen, geschehen, was darinnen vorgenommen werden kann, ꝛc. Z. B. 1 Jahr verhält sich zu 10 Jahren, wie die in einem Jahre von einem Capitale entstehenden Zinsen à 5 Rthlr. zu den in 10 Jahren daraus entstehenden Zinsen à 50 Rthlr. Oder:

6 Wochen verhalten sich zu 8 Wochen, wie eine in den erstern gelieferte Arbeit zu der in den letztern gelieferten.

Ingleichen eben deswegen auch Zeit als Maaß der, um in derselben die abgemessene Arbeit zu verrichten, erforderlichen Arbeiter. Z. B. In 3 Wochen verrichten vier Arbeiter eine gewisse Arbeit; in 6 Wochen können sie zwey Arbeiter verrichten, weil nach Maaßgabe der Vermehrung der Zeit sich die Zahl der Arbeiter vermindert, also:

6 Wochen zu 3 Wochen, wie 4 Arbeiter zu 2 Arbeitern.

5. Arbeit als Maaß des dadurch erworbenen Profits, als, an einem Stuhle verdient ein Tischler 14 ggl. an 6 Stühlen 84 ggl., oder:

1 Stuhl zu 6 Stühlen, wie 14 ggl. : 84 ggl.

6. Capital als Maaß, in Ansehung der daraus hervorgehenden Zinsen.

1000 Rthlr. Capital verhalten sich zu 100 Rthlr. Capital, wie 40 Rthlr. Zinsen zu 4 Rthlr. Zinsen.

7. Gewisse allgemeine Verhältnisse, die sich bald auf innern Werth, bald auf Convention, beziehen, als Maaß anderer davon nunmehr abhängenden Sachen:

Z. B.

Z. B. 100 Rthlr. in Golde verhalten sich zu 50 Rthlr. in Golde, wie 110 Rthlr. Preuß. Courant zu 55 Rthlr. Preuß. Courant.

Oder: 5 Procent verhalten sich zu 4 Procent, wie 50 Rthlr. als eine conventionelle Interesse von 1000 Rthlr. zu 40 Rthlr. als eine geringere conventionelle Interesse von 1000 Rthlr.

Oder: 100 Berliner Ellen verhalten sich zu 50 Berliner Ellen, wie 116 Ellen in Hamburg zu 58 Ellen in Hamburg, wo die Berliner Ellen das Maaß der Hamburger werden, weil, wenn 100 Berliner Ellen gleich 116 Hamburger Ellen sind, alsdenn auch 58 Hamburger Ellen gleich 50 Berliner Ellen seyn müssen.

8. Es können auch Sachen durch mehr, als einerley, Art von Maaß bestimmt werden, woraus ein zusammengesetztes Verhältniß entsteht, worinnen sie sich befinden, weswegen man sie auch alsdann mehrmals in ein Verhältniß bringen muß.

Als: 100 Rthlr. geben in einem Jahre 4 Rthlr. Zinsen, 200 Rthlr. geben in drey Jahren 24 Rthlr. Zinsen; nämlich: hier sind zwey Proportionen, und die 24 Rthlr., welche von den 200 Rthlr. als Zinsen in drey Jahren erhalten werden, werden 1) durch die Capitale zu 4 Procent (weil 100 Rthlr. in einem Jahre 4 Rthlr. geben) und 2) durch die drey Jahre bestimmt. Folglich haben die 24 Rthlr. Zinsen ein zweyfaches Maaß: 1) die Capitale, 2) die drey Jahr, worinnen die Zinsen erwachsen. Stellt euch daher diese Verhältnisse so vor:

1) 100 Rthlr. Capital verhalten sich zu 200 Rthlr. Capital, wie 4 Rthlr. jährliche Interesse zu 8 Rthlr. jährlicher Interesse.

2) 1 Jahr verhält sich zu 3 Jahren wie die einjährige Interesse von 8 Rthlr. zu der dreyjährigen von 24 Rthlr.

9. Es kann auf solche Art eine Sache durch eine Menge von Verhältnissen (und daraus entstehenden Proportionen) bestimmt werden. Gesetzt, es wären 5 Rthlr.

Sächsisches Silbergeld gleich 1 Louisd'or, 1 Louisd'or gleich $5\frac{1}{2}$ Rthlr. Preuß. Courant, $3\frac{1}{4}$ Rthlr. Preuß. Courant gleich 1 Ducat, so würden $6\frac{10}{13}$ Ducat. gleich 20 Rthlr. Sächs. Silbergeld seyn, nach folgenden Proportionen:

5 Rthlr. Sächs. Silbergeld : 20 Rthlr. Sächs. Silbergeld = 1 Louisd'or : 4 Louisd'or. 1 Louisd'or : 4 Louisd'or = $5\frac{1}{2}$ Rthlr. Preuß. Cour. : 22 Rthlr. Preuß. Cour. $3\frac{1}{4}$ Rthlr. Preuß. Cour. : 22 Rthlr. Preuß. Cour. = 1 Ducat : $6\frac{10}{13}$ Ducat.

10. Es kann aber eben so leicht kommen, daß alles das, was in diesen zehn Fällen das bestimmende Maaß war, selbst bestimmt wird, und das, was hier bestimmt wurde, das bestimmende Maaß wird, folglich die Fälle umgekehrt werden.

Bey Nro. 1. kann es umgekehrt heißen: 16 ggl. : 32 ggl. = 2 ℔ : 4 ℔ Zucker. Oder: Wenn ich für 16 ggl. 2 ℔ Zucker erhalte, so erhalte ich für 32 ggl. 4 ℔, wo die Groschen das bestimmende Maaß sind; denn jemehr mahle ich 16 ggl. gebe, desto mehrere Pfund Zucker erhalte ich.

Bey Nro. 2. 3 Rthlr. : 9 Rthlr. = 2 Ellen Taffet : 6 Ellen. Wo wiederum die Thaler das bestimmende Maaß der Ellen Taffet sind.

Bey Nro. 3. 50 Rthlr. : 100 Rthlr. = 1 Orthof Wein : 2 Orthof, d. i. Wenn 50 Rthlr. das Maaß des Werthes von 1 Orthof sind, so sind es 100 Rthlr. von 2 Orthof.

Bey Nro. 4. 5 Rthlr. Zinsen : 50 Rthlr. Zinsen = 1 Jahr : 10 Jahr, d. i. 5 Rthlr. Zinsen werden in einem Jahr erhalten, 50 Rthlr. Zinsen in zehn Jahren, oder 5 Rthlr. Zinsen bestimmen die Interesse von 1 Jahre; 50 Rthlr. die von 10 Jahren.

Oder: 2 Arbeiter : 4 Arbeiter = 3 Wochen : 6 Woch. d. i. 4 Arbeiter gebrauchen 3 Wochen; 2 Arbeiter 6 Wochen, oder 4 Arbeiter bestimmen hier 3 Wochen, folglich

folglich 2 Arbeiter 6 Wochen, weil nach Maaßgabe der Verminderung der Arbeiter sich die Zeit der Arbeit vermehret.

Bey Nro. 5. 14 ggl.: 84 ggl. = 1 Stuhl: 6 Stühlen, nämlich 14 ggl. sind der Profit an 1 Stuhle; 84 ggl. der Profit an 6 Stühlen, wo also hier die Zahl der Groschen das Maaß der Zahl der Stühle wird.

Bey Nro. 6. 40 Rthlr. sind die Zinsen von 1000 Rthlr. also 4 Rthlr. sind die Zinsen von 100 Rthlr. Hier sind also die Zinsen das Maaß der Capitale. Sind 40 Rthlr. die Zinsen eines Capitals von 1000 Rthlr., so hat der, der 4 Rthlr. Zinsen erhält, ein Capital von 100 Rthlr.

Bey Nro. 7. 50 Rthlr. Zinsen von 1000 Rthlr. Capital: 40 Rthlr. Zinsen von 1000 Rthlr. Capital = 5 Pr. Cent: 4 Pr. Cent.

Wenn nämlich 1000 Rthlr. jährlich 50 Rthlr. Zinsen geben, so geben 100 Rthlr. Capital 5 Rthlr. Zinsen und geben 1000 Rthlr. 40 Rthlr. Zinsen, so geben 100 Rthlr. 4 Rthlr., wo also 50 und 40 Rthlr. jährlicher Zinsen von 1000 Rthlr. Capital dasjenige bestimmen, was 100 Rthlr. Capital jährlich an Zinsen geben.

IV. Sobald nun zu drey vorhandenen Gliedern einer geometrischen benannten Proportion das vierte Glied gesucht werden soll, so findet, um selbiges zu erhalten, die Anwendung der Regel de Tri statt. Z. B. 2 ℔ Kaffe kosten 16 ggl. was 3 ℔? Hier ist eine geometrische Proportion,

nämlich: 2 ℔ : 3 ℔ = 16 ggl. : x ggl.

man soll die Groschen finden, wozu 16 ggl. sich so verhalten, wie 2 ℔ zu 3 ℔. Das vierte Glied wird nun mit leichter Mühe nach Cap. 9. XVII. gefunden, und wenn etwa die vorhandenen Glieder Brüche bey sich führten, oder bloße Brüche wären, so wird die Anwen-

dung der erhaltenen Lehren (9. Cap. XIX.) die jedesmahlige Affindung des vierten Gliedes leicht machen.

Hier werden also 16 ggl. mit 3 multiplicirt = 48 und dividirt durch 2 = 24, welches Groschen seyn müssen (daselbst XVIII. 1.).

V. Es wird nunmehr leicht werden, ein jedes Exempel der Regel de Tri zu berechnen. Indessen wird es nicht unnütz seyn, hier noch einige Bemerkungen beyzufügen, welche sowohl die Beurtheilung solcher Exempel überhaupt, als auch die Anordnung der Glieder betreffen.

1. Wenn wir die vorige Aufgabe geben, so sagen wir, 2 ℔ kosten 16 ggl. was 3 ℔?

Die Rechenmeister pflegen gewöhnlich, so wie diese Angabe ist, die drey Glieder auch niederzuschreiben.

2 ℔ — 16 ggl. — 3 ℔.

Da sie auf diese Art 16 ggl. mit 3 multipliciren und das Product durch 2 dividiren, so bringen sie 24 ggl. auch heraus.

Sie geben zu dem Ende die Regel: Die Fragezahl, d. i. das Glied, von welchem ich etwas wissen will, muß in die dritte Stelle zu stehn kommen. Hier war es 3 ℔, von welchen ich wissen wollte, was sie kosteten?

Es ist aber diese Art, die Glieder niederzuschreiben, oder zu ordnen, nicht zu empfehlen. Denn erstlich ist dieses keine wahre Proportion, weil 2 ℔ kein Verhältniß zu 16 ggl. haben, indem ℔ und ggl. völlig ungleichartige Dinge sind; eben so haben 3 ℔ zu 16 ggl. kein Verhältniß. Es ist auch hier blos die Rede von dem Verhältnisse von 2 ℔ zu 3 ℔, und dann von 16 ggl. zu der Zahl von ggl., die durch das Verhältniß 2:3 zu 16 ggl. bestimmt werden.

Zweytens. Die Angabe der Glieder wird nicht stets so gemacht, daß gerade die angegebenen Glieder an einer

Stelle

Stelle zu stehen kommen, wo sie stehen müssen, oder stehen dürfen. Schreibt man nun die Glieder so hin, wie sie ausgesprochen, oder angegeben werden, so hat man mancherley Regeln zu beobachten, welche in den Rechenbüchern theils oft auf eine höchst unvollkommene Art angegeben werden, theils unbestimmt angegeben werden müssen, weil das Verfahren ganz unnatürlich ist. Z. B. 100 Rthlr. Capital geben in einem Jahre 4 Rthlr. Zinsen, wie viel Thaler Capital gehören zu jährlichen 60 Rthlr. Zinsen? Also nach der Angabe gesetzt:

100 Rtlr. Cap. : 4 Rtlr. Zins. = 60 Rtlr. Zins. x Rtlr. Cap.

$$\begin{array}{r|l} 4 & 100 \\ \hline 240 & 2\frac{4}{10}\ \text{Rthlr.} \end{array}$$

welches Unsinn ist, weil 1) wenn 100 Rthlr. Capital jährlich 4 Rthlr. Zinsen geben, $2\frac{4}{10}$ Rthlr. Capital nicht 60 Rthlr. Zinsen geben können; und 2) 100 Rthlr. Capital sich zwar zu Zinsen, als Geld zu Geld verhalten können, aber die Proportion fehlerhaft ist: wie 100 Rthlr. Capital zu 4 Rthlr. Zinsen, so 60 Rthlr. Zinsen zu — Capital, sondern, da hier im zweyten Gliede Zinsen stand, so konnte keinesweges im dritten auch Zinsen zu stehen kommen, welches aber geschahe, weil der Ansatz des Exempels nach der Angabe gemacht wurde.

VI. Will man daher einen richtigen Ansatz zur Berechnung eines Exempels nach der Regel de Tri formiren, so beobachte man folgendes, welches, wenn es von dem Verstande begriffen ist, demselben nie entfallen kann, welches aber bey den mechanischen Rechnungs-Regeln stets der Fall ist, sobald das Rechnen nicht tägliche Beschäftigung wird.

1. Man bringe stets die unbenannte Sache, oder das, was man wissen will, in das vierte Glied.

2. Man ordne zu dem Ende, die drey vorhandenen gegebenen Glieder in eine richtige Proportion, und zwar nach

nach den bishero gelehrten Grundsätzen so, daß erstlich die gleichartigen Dinge in einerley Verhältniß kommen, und zweytens darauf gesehen werde, ob die Proportion eine steigende oder fallende ist.

3. Ist die Proportion eine steigende, welches sich daraus ergiebt, daß das zu suchende vierte Glied größer, als das dritte wird, welches die gesunde Vernunft ohne Rechnung sagen wird, so wird von den beyden ersten Gliedern das kleinere zu dem ersten gemacht, und das größere zu dem zweyten (XIV.).

4. Ist die Proportion eine fallende, so wird das erste Glied das größere, das zweyte das kleinere. Hierin bestehen alle Regeln, die bey der Regel de Tri zu bemerken sind, und wenn dies beobachtet wird, so hat man weiter keine von den mannichfaltigen, mechanischen Regeln nöthig, die den Anfänger stets in Ungewißheit lassen, und von denen auch der Geübteste nicht weiß, warum er sie befolge?

VII. Einige Exempel werden dieses noch weiter erläutern:

2 ℔ kosten 5 Rthlr. Was 6 ℔?

Der Ansatz muß so seyn:

2 ℔ : 6 ℔ = 5 Rthlr. : x Rthlr. so ist die Berechnung:

$$\frac{5}{30}\Big|\begin{matrix}6\\2\end{matrix}$$

15 Rthlr. das vierte Glied, oder das Gesuchte (XVII.)

Denn erstlich: Es wird hier eine Zahl von Thalern gesucht; diese Zahl wird das vierte Glied; folglich müssen 5 Rthlr. in das dritte Glied kommen, damit in das dritte und vierte Glied Dinge von einer Art, hier Rthlr. und Rthlr. zu stehen kommen.

Zweytens: Die 2 ℔ und 6 ℔ müssen in das erste Verhältniß kommen und das erste und zweyte Glied werden.

Da

Da nun drittens: 6 ℔ mehr kosten werden, als zwey ℔, und also das vierte Glied eine größere Zahl werden muß, als das dritte ist, so wird die Proportion eine steigende, und daher muß das zweyte Glied auch größer, als das erste seyn müssen. Daher kommt 2 ℔ als das erste, und 6 ℔ als das zweyte Glied zu stehn. Dies ist der Grund der Anordnung, oder des Ansatzes des Exempels.

Was kosten 17 Ellen, wenn $2\frac{1}{2}$ Elle 11 ggl. kosten?

Setzet an: $2\frac{1}{2}$ Ell.: 17 Ell. = 11 ggl.: x ggl.

Berechnung:

$\frac{5}{2} : \frac{34}{2} = 11 : x \quad 34 \times 11 = 374 \mid 5$

$74\frac{4}{5}$ gl. = 3 Rlr. 2 gl. $9\frac{3}{5}$ Pf.

In das dritte Glied mußten schlechterdings die 11 gl. kommen, weil das vierte Glied ggl. geben sollte. Daher mußten das erste und zweyte Glied Ellen werden. Ferner: 17 Ellen kosten gewiß mehr, als $2\frac{1}{2}$ Elle, also wird das vierte Glied größer, als das dritte; die Proportion ist also eine steigende. Darum konnten wir nicht sagen 17 Ell.: $2\frac{1}{2}$ Ell., sondern, da das vierte Glied größer werden mußte, als das dritte, so mußte auch das zweyte Glied größer seyn, als das erste.

Hier sowohl, als in dem vorigen Exempel kehrten wir uns keinesweges an die Angabe: sonst hätten wir hier 17 Ell.: $2\frac{1}{2}$ Ell. setzen müssen, und hätten ganz falsch gerechnet.

Für 5 Rthlr. erhalte ich 3 ℔, wie viel für 11 Rthlr.

Setzet an: 5 Rthlr.: 11 Rthlr. = 3 ℔: x ℔.

Berechnung:

11

$\frac{3}{33} \mid 5$

$6\frac{3}{5}$ ℔

Denn

Denn hier suche ich Pfunde, daher wird das vierte Glied ℔, und deswegen mußte das dritte Glied ℔ werden, und also 3 ℔ schlechterdings in das dritte Glied kommen. Ferner: Wenn ich für 5 Rthlr. 3 ℔ erhalte, so bekomme ich für 11 Rthlr. gewiß mehr. Folglich, da das vierte Glied größer werden muß, als das dritte, so muß auch das zweyte Glied größer, als das erste, seyn, und es darf keinesweges anders aufgesetzt werden, als geschehen ist.

Was kosten 3 ℔, wenn 4 ℔ 6 Rthlr. kosten?

Setzet an: 4 ℔ : 3 ℔ = 6 Rthlr. : x Rthlr.

Berechnung 6

$$\frac{3}{18}\ \Big|\ \frac{4}{4\frac{1}{2}}$$ Rthlr.

Hier werden Rthlr. gesucht, also werden in das vierte Glied Rthlr. kommen müssen, und deswegen müssen auch in das dritte Glied Rthlr. kommen.

Weil aber, wenn 4 ℔ 6 Rthlr. kosten, 3 ℔ gewiß weniger, als 6 Rthlr. kosten werden, so wird also das vierte Glied hier kleiner, als das dritte, werden müssen; deswegen muß auch das zweyte kleiner, als das erste werden, und also die Proportion eine abfallende seyn. Ganz unrichtig wäre nach der Angabe angesetzt: 3 ℔ : 4 ℔ = 6 Rthlr. : x Rthlr., gäbe 8 Rthlr., welches absurd wäre.

3 Schock kosten 1 Rthlr. 4 ggl., was 2 Schock?

Setzet aus gleichen Gründen an:

3 Schock : 2 Schock = 1 Rthlr. 4 ggl. : x Rthlr. ggl.
macht 18 ggl. 8 Pf.

Wenn 6 Mann 18 ℔ Brodt verzehren, wie viel 12 Mann?

Setzet an: 6 Mann : 12 Mann = 18 ℔ Br. : x ℔ Br.
macht 36 ℔.

Die Proportion ist eine steigende: denn da 12 Mann mehr verzehren als 6 Mann, so wird das vierte Glied

größer,

größer, als das dritte, werden und folglich das zweyte größer, als das erste, werden müssen.

Wie viel Mann verzehren 36 ℔ Brodt, wenn 6 Mann 18 ℔ Brodt gebrauchen?

Saget: 18 ℔ : 36 ℔ = 6 Mann : x Mann, macht 12 Mann.

Es ist offenbar erstlich, daß hier in das vierte Glied eine Zahl kommen muß, welche Mann muß benannt werden, daß also in das dritte Glied Mann, und folglich in die beyden ersten ℔ Brodt und ℔ Brodt werden gesetzt werden müssen.

Zweytens ist es gewiß, daß, wenn 18 ℔ 6 Mann sättigen, so werden 36 ℔ noch mehr sättigen; folglich wird das vierte Glied größer, als das dritte, und daher muß das erste und zweyte so geordnet werden, daß das zweyte das größere, und das erste das kleinere wird.

8 Arbeiter werden mit einer Arbeit in 6 Wochen fertig, wie viel sind erforderlich, wenn die Arbeit in 12 Wochen beendigt werden soll?

12 Wochen : 6 Wochen = 8 Arbeiter : x Arbeiter; macht 4 Arbeiter.

Denn das vierte Glied wird hier eine Zahl von Arbeitern, also das dritte auch. Und da ein größerer Termin zur Arbeit anberaumt ist, so werden der Arbeiter weniger werden.

Deswegen wird die Proportion fallend und das vierte Glied kleiner, als das dritte, und daher wird auch das erste Glied das größere, und das zweyte das kleinere werden müssen.

100 Rthlr. Capital geben in 10 Jahren 50 Rthlr. Zinsen, in wie langer Zeit geben 1000 Rthlr. Capital 50 Rthlr. Zinsen, nach gleichem Zinsfuße?

Saget:

Saget: 1000 Rlr. Capital: 100 Rlr. Cap. = 10 J. : x J.

$$\frac{1000}{\text{Berechnung: } 100 \times 10 = 1000 \mid 1 \text{ Jahr.}}$$

Es wird hier eine Zeit von Jahren zu wissen verlangt, daher kommt in das vierte Glied Jahr, und folglich auch in das dritte Jahr.

Es werden daher auch in das erste und zweyte Glied Capitale zu stehen kommen.

Nun müssen 1000 Rthlr. Capital diese 50 Rthlr. Zinsen in geringerer Zeit geben, als es 100 Rthlr. Capital thun.

Also wird das vierte Glied kleiner, als das dritte, die Proportion wird fallend und das zweyte demnach kleiner, als das erste. Es konnte daher der Ansatz nicht anders gemacht werden, als geschehen ist.

Wie viel Ellen Leinwand von 1 Elle Breite erhalte ich aus 2 ℔ Garn, wenn diese 15 Ellen Leinwand von 2 Ellen Breite geben?

Saget:

1 Elle Breite : 2 Ell. Breite = 15 Ell. Leinw. : x Ell. Leinw.

$$\frac{2 \quad 1}{30 \mid 30 \text{ Ellen.}}$$

Es müssen in das vierte Glied **Ellen Leinwand in Ansehung der Länge** kommen, welches man hier wissen will; daher ist das dritte Glied auch **Ellen Leinwand in Ansehung der Länge.**

Ist die Leinwand schmähler, so müssen 2 ℔ Garn mehr Ellen geben, als wenn sie breiter ist. Dahero wird das vierte Glied hier größer, als das dritte, und die Proportion eine steigende; darum ward auch das zweyte Glied das größere, und das erstere das kleinere.

Und da das Verhältniß von 1 Ell. Breite und 2 Ell. Breite die Zahl der aus 2 ℔ kommenden Ellen der Länge bestimmen soll; so müssen diese Zahlen 1 und 2 nothwendig in das erste und zweyte Glied kommen; die 2 ℔

aber,

aber, aus welchen beyde Arten der Breite der Leinwand gemacht werden, müssen ganz wegfallen.

VIII. Wenn man solche Fälle, als die drey letztern hier vorgekommenen Exempel so ansetzen will, als man sie ausspricht, so erhält man stets etwas ganz falsches, denn

8 Arb.: 6 Wochen = 12 Wochen

$$\frac{6}{72} \Big| \frac{8}{9}$$ Arbeiter;

ist falsch. Ferner:

100 Rthlr. Cap.: 10 Jahr = 1000 Rthlr. Cap.: x
giebt 100 Jahr;

ganz falsch! und zuletzt:

2 Ellen Breite: 15 Ellen = 1 Ell. Br.: x giebt $7\frac{1}{2}$ Ell.

eben so falsch!

IX. Um solche Fälle zu berechnen, sagen die meisten Rechenbücher, wende man die umgekehrte Regel de Tri an, das heißt: man multiplicire das erste und zweyte Glied mit einander, und dividire das Product durch das dritte.

1. Es taugt aber diese Regel nicht: denn erstlich, so bestimmen jene Anweisungen entweder gar nicht, oder doch nur auf eine unsichere Art, wenn eher der Fall eintritt, da man die umgekehrte Regel de Tri anwenden müsse.

Es geben nämlich die besten mechanischen Lehrbücher diese Regel an, um einen gegebenen Fall zu prüfen, ob er zur umgekehrten Regel de Tri gehöre, oder nicht.

Wenn das Verhältniß verkehrt sey, so finde die umgekehrte Regel de Tri statt. Ein verkehrt Verhältniß aber sey in folgenden Fällen vorhanden:

Je mehr Arbeiter arbeiten, desto eher wird die Arbeit geendigt; folglich: je mehr Arbeiter, desto kürzer ist die Zeit ihrer Arbeit. Darin liegt das Verkehrte.

Je weniger Menschen von einem Vorrathe von Lebensmitteln zehren, desto längere Zeit können sie mit dem Vorrathe auskommen; folglich: **je weniger Menschen, desto längere Zeit** zehren sie.

Je breiter ein Stück Zeug ist, desto weniger Ellen der Länge bedarf man zu einem Kleide; folglich: **je breiter, desto kürzer.**

Je größer das Capital ist, desto weniger Zeit ist nöthig, um davon eine gewisse Summe Zinse zu erhalten; folglich: **je mehr Capital, desto kürzere Zinszeit** ꝛc.

Weil aber solche Erklärungen keine deutlichen Begriffe geben, sondern nur auf Fälle verweisen, bey welchen doch leicht Nebenumstände mit eintreten können, so siehet man, daß eine solche Anweisung und andre von derselben Art zu einer gründlichen Belehrung nicht für hinreichend angesehen werden können.

Zweytens. Wenn man nun auch genau wissen könnte, welche Fälle zur **umgekehrten Regel de Tri** gehörten, so wird doch das Unbestimmte, was so oft in Ansehung **des Ansatzes der Regel de Tri-Exempel überhaupt** gelehrt wird, auch bey diesen Fällen die Ungeübten immer noch häufig verwirren. Man giebt nämlich überhaupt zu der Anstellung der Exempel der Regel de Tri die Regeln: **erstlich:** die Fragezahl (d. h. die Zahl von der ich etwas wissen will, oder gleichsam erfrage. Z. B. **was kosten 6 lb?** Oder: **wie viel erhalte ich für 3 Rthlr.?** Oder: **wie lange arbeiten 8 Arbeiter?** Oder: **wie viel Arbeiter gebraucht man in 5 Wochen?** ꝛc.) setzet als das dritte Glied an; zweytens: was mit ihr gleichen Namen führt, wird das erste Glied. Die übrigbleibende Zahl wird das zweyte.

Wenn aber auch die Fragezahl in den meisten Fällen leicht zu erkennen ist, so kann doch der Ungeübte zuweilen ihrentwegen in Ungewißheit bleiben; noch mehr, wenn zuweilen die Fragezahl aus mehrern Stücken zusammengesetzt zu seyn scheint, und wenn ferner die Glieder einander

durch

durch die Benennung so ähnlich werden, daß es nothwendig auf Begriffe, nicht bloß auf den Schall ankommt, um sie gehörig zu unterscheiden. Es kann ja auch die Angabe eines Exempels auf verschiedene Art gemacht werden. Bey dem Exempel: 2 ℔ Garn geben 15 Ell. Leinwand von 2 Ellen Breite, wie viel geben sie Ellen Leinwand von 1 Elle Breite? kann ich auch sagen: Wie viel Ellen Leinwand von 1 Elle Breite geben 2 ℔ Garn, wenn sie von 2 Ell. Breite 15 Ell. geben?

Hier muß ich nach den mechanischen Regeln das Exempel überhaupt so stellen:

1) Die Fragezahl: **wie viel Ellen von 1 Elle Breite:** wird das dritte Glied.

2) Was mit ihr gleiches Namens ist, wird das erste Glied; das ist hier: 2 Ellen Breite.

3) Das zweyte Glied ist das übriggebliebene, das ist hier: 15 Ell. Leinwand. Daher kommt der Ansatz:

2 Ell. : 15 Ell. = 1 Ell. : x und weil es

4) heißt: **je mehr Breite, desto weniger Länge,** oder, hier: **je weniger Breite, desto mehr Länge,** so gehört das Exempel zu der umgekehrten Regel de Tri; es wird daher das erste Glied mit dem zweyten multiplicirt und das Product durch das dritte dividirt. So erhalten wir 30 Ellen richtig.

2. Der Ungeübte wird aber nicht mit einer solchen Leichtigkeit mit diesem Exempel fertig werden. Er findet unter den zu dem Exempel gegebenen Sachen 15 Ellen, 2 Ellen, 1 Elle, 2 ℔, also 4 Glieder, da er doch nur drey Glieder braucht. Drey dieser Glieder führen den gleichen Namen **Ellen**; von Nebenbegriffen, z. B. Breite, ist ihm nichts gesagt. Er wird daher erstlich nicht wissen, ob 2 ℔, oder 1 Elle die Fragezahl ausmachen, und er wird fast geneigter seyn, das erste anzunehmen. Sollte er auch 1 Elle als die Fragezahl zum dritten Gliede annehmen, so wird er zweytens, bey dem

ersten Gliede ungewiß bleiben, ob es 2 Ell. oder 15 Ell. seyn sollen, wenn er den Nebenbegriff von Breite, worauf hier alles ankommt, übersieht, welches um desto eher geschehen kann, da er mehr an Worte, als Begriffe, gewöhnt ist.

Bey dem zweyten Gliede wird er drittens nicht wissen, ob er 15 Ellen oder 2 ℔, anzusetzen habe; denn beyde können als übrig gebliebene Glieder angesehen werden. Und wie noch weit unsichrer ist das Verfahren bey den Exempeln der zusammengesetzten Regel de Tri (der so genannten *Regula quinque*, *septem etc.*)! Wird endlich auch die Wahrheit getroffen, wie unsicher und übel bleibt es nicht doch immer, nach bloßen unbestimmten Regeln zu verfahren und den Grund seines Verfahrens gar nicht zu kennen!

3. Nach dem, was wir bisher gesagt haben, war der Ansatz zu dem vorigen Exempel eben so leicht als sicher.

1) Die 2 ℔ Garn geben mehr Ellen zu 1 Elle Breite, als zu 2 Ellen. Dahero wird das vierte Glied größer, als das dritte. Die Proportion ist steigend.

2) Da das, was gesucht wird, Ellen in der Länge sind, so muß das dritte Glied auch Ellen in der Länge werden.

3) Das erste und zweyte Glied heißen also: 1 Ell. Breite : 2 Ell. Breite.

4) Die 2 ℔ gehören hiernach in den Ansatz nicht hinein. Sie bestimmen nämlich zunächst nichts weiter. Wir wollen blos die Zahl wissen, die sich so zu 15, wie sich 2 zu 1 verhält. Folglich:

1 Ell. Breite : 2 Ell. Breite = 15 Ell. Länge : x Ell. Länge.

4. Daher wollen wir die sogenannte umgekehrte Regel de Tri, oder *Regula de tri inversa*, oder *reciproca*, oder *indirecta*, mit allen ihren besondern Regeln denenjenigen überlassen, die gern, ohne nach zu denken, auf ein Gerathewohl rechnen mögen.

X. Es ist hier der Ort, noch einige nothwendige Erinnerungen über die Regel de Tri-Exempel überhaupt anzustellen.

1. Vor jeglicher Berechnung eines solchen Exempels muß stets erwogen werden, ob die drey gegebenen Dinge wirklich Glieder einer und eben derselben benannten geometrischen Proportion sind, und folglich ein Regel de Tri-Exempel formiren können.

2. Es müssen unter den drey gegebenen Dingen nothwendig zwey gleichartig seyn; denn sonst ist kein Verhältniß da (Cap. 9. IV.). Z. B. 2 ℔ Kaffe kosten 16 ggl. was 4 ℔ Kaffe? Hier sind 2 ℔ Kaffe und 4 ℔ Kaffe gleichartige Sachen. Folglich passen diese Dinge zu einem Exempel.

Falsch wäre: 2 ℔ Kaffe kosten 16 ggl., was 1 ℔ Thee? Oder: was 1 Elle Leinwand?

3. Namen, welche verschieden klingen, sind noch kein Beweis, daß die Sachen ungleichartig sind. Denn es können gleichartige Sachen verschiedene Namen haben, wenn die eine etwa das Geschlecht, die andere eine Untergattung ist. Als: 2 ℔ kosten 6 ggl. was 16 Loth? Hier sind 2 ℔, 16 Loth gleichartige, wenn gleich, dem Namen nach, verschiedene Sachen, indem 16 Lt. = $\frac{1}{2}$ ℔, also 2 ℔ zu 16 Loth sich wie 2 ℔ : $\frac{1}{2}$ ℔, oder wie 64 Lt. : 16 Lt. verhalten (IV. 2.).

Oder: für 2 Rthlr. erhalte ich 3 Ellen, wie viel für 8 ggl.? Hier ist es eben das, als $\frac{6}{3}$ Rhlr. geben 3 Ellen, was $\frac{1}{3}$ Rthlr. Oder: 48 ggl. geben 3 Ellen, was 8 ggl.?

4. Es müssen in jeder Proportion zwey und zwey gleichartige Sachen seyn. Z. B. 2 ℔ Kaffe : 4 ℔ Kaffe = 8 ggl. : 16 ggl., sonst taugen die Glieder nicht zu einem Regel de Tri-Exempel fürs gemeine Leben.

5. Indessen können alle vier Glieder doch einen allgemeinen Namen haben, wie wohl an sich doch nur zwey

und zwey davon völlig gleichartig sind, als: 100 Rthlr. Capital geben 5 Rthlr. Interesse, wie viel 1000 Rthlr. Capital?

Hier heißt es:

100 Rtlr. Cap. : 1000 Rtlr. Cap. = 5 Rtlr. Inter. : 50 Rlr. Interesse. Allein die Rthlr. im ersten und zweyten Gliede sind Capital und die im dritten und vierten Gliede sind Interesse, also nicht völlig gleichartige Dinge. Denn Capital und Zinsen ist zwar beydes Geld; aber das erste ist hier gleichsam Ursach und das andere Wirkung.

Oder: 100 ℔ Berliner Gewicht thun 100¼ ℔ Cölnisch, was 50 ℔ Berliner? Saget:

100 ℔ Berl. : 50 ℔ Berl. = 100¼ ℔ Cölln. : 50⅛ ℔ Cölln.

Hier sind in allen 4 Gliedern ℔; allein das erste und zweyte Glied sind Berlin. und das dritte und vierte Glied sind Cölln., also nicht völlig gleichartige Dinge: denn Berlin. und Cölln. ℔ sind zwar beydes Gewicht; aber 1 Berl. ℔ ist als Menge von Materie von 1 ℔ Cölln. noch verschieden.

Oder: einer, der 100 Rthlr. Einnahme hat, giebt 2½ Rthlr. zu einer Contribution, was giebt einer, der 1000 Rthlr. Einnahme hat?

100 Rtlr. Einnahme : 1000 Rtlr. Einnahme = 2½ Rtlr. Contrib. : 25 Rthlr. Contrib.

Hier ist das erste und zweyte Glied Vermögen, das dritte und vierte Glied sind Contribution; also sind die Thaler hier nicht völlig gleichartige Dinge: denn das erste und zweyte Glied ist wiederum gleichsam Ursach, und das dritte und vierte Glied sind Wirkung.

6. Es muß bey den Gliedern zu einem Exempel der Regel de Tri der Umstand stets statt finden, daß das vierte Glied zu dem dritten sich in jedem Falle so verhalten kann, als das zweyte zum ersten.

Wenn ein Bothe in einem Tage 4 Meilen geht, wie viel 3 Bothen?

1 Bothe : 3 Bothen = 4 Meilen zu x Meilen, giebt 12 Meilen.

Da aber drey Bothen nicht dreymal so stark gehen, als ein Bothe; oder da, wenn drey Bothen gehen, die Geschwindigkeit zu gehen nicht dreymahl stärker wird, als bey einem, so können drey auch nicht einen dreymahl so langen Weg vollenden, als einer, und es schickt sich dieser Fall nicht zu einem Exempel der Regel de Tri.

Ingleichen: Wenn jemand dem, der eine große Quantität Waaren auf einmahl kauft, diese Waare wohlfeiler läßt, als einem, der wenig nimmt, so kann der Preis des ersten nicht nach der Regel de Tri berechnet werden. Als: 3 ℔ werden mit 1 Rthlr. bezahlt, was kosten 3 Zentner? Wo ich in diesem Falle nicht sagen kann: 3 ℔ : 2 Zent. = 1 Rthlr. : 73 $\frac{1}{3}$ Rthlr., sondern es wird dieser Fall auf eine andere Art berechnet.

6 Arbeiter graben einen Graben in einem Tage 40 Fuß tief, wie tief in 20 Tagen?

1 Tag : 20 Tage = 40 Fuß : x Fuß, giebt 800 Fuß. Allein die Arbeiter können bey sich vermehrender Tiefe nicht so geschwind arbeiten, als im Anfange, folglich würden sie in 20 Tagen nicht so viel vollenden, als man ausgerechnet hatte.

Ein Diamant von 1 Karath kostet 7 Rthlr., was kostet er, wenn er von gleicher Güte 2 Karath wiegt?

1 Karath : 2 Karath, wie 7 Rthlr. zu x Rthlr., so würde die Rechnung 14 Rthlr. geben; allein er kostet weit mehr, weil der Werth der Diamanten nicht in geometrischer Proportion zu dem Gewichte steigt.

Ein Stein fällt in einer Secunde ohngefähr 15 Rheinländische Fuß; wenn man nun einen Stein von einem Thurme hat fallen lassen, der 3 Secunden zugebracht hat, von was für einer Höhe muß derselbe gefallen seyn?

1 Secund. : 3 Secund. = 15 Rh. Fuß : x Rh. Fuß. gäbe 45 Rh. Fuß. So hoch wäre also der Thurm. Allein, da ein fallender Körper mit jedem Augenblicke in der Geschwindigkeit zunimmt, und die zweyte Secunde seinen Fall schon auffallend vermehrt, so schickt sich dieses Exempel nicht zur Regel de Tri.

Aus einem mit Wein angefüllten Fasse laufen in 2 Minuten 3 Maaß ab, in wie viel Zeit werden 240 Maaß abgelaufen seyn?

3 Maaß : 240 Maaß = 2 Minuten : x Minuten, geben 3 Stunden 40 Minuten.

Es nimmt aber die Geschwindigkeit des Laufens flüssiger Materien wegen ihres eigenen Druckes mit der Verminderung ihrer Quantität ab, daher würde der Wein in der berechneten Zeit noch nicht ausgelaufen seyn.

Zur Austapezirung eines Zimmers gebraucht man 60 Ellen Tapeten, die $1\frac{1}{2}$ Elle breit sind; wenn man nun eine Tapete zu $1\frac{1}{4}$ Elle Breite hätte, wie viel wird man zu einem gleich großen Zimmer davon gebrauchen?

$1\frac{1}{4}$ Elle : $1\frac{1}{2}$ Ell. = 60 Ell. Tapeten : x Ell. Tapeten,
giebt 72 Ellen.

Weil aber zerschnittene Sachen sich nie so genau zusammenpassen, und ansetzen lassen, daß nicht bald etwas mehr, bald weniger, verloren gehen sollte, so würde man auf eine solche Rechnung sich nicht mit größter Sicherheit verlassen können.

XI. Die Berechnung derjenigen Exempel, in welchen Brüche vorkommen, können keinesweges noch Schwierigkeiten machen. Wir wollen indessen zur Erläuterung noch einige Fälle anführen.

1. (3. Cap. XIX.) Wenn das erste Glied ein Bruch ist.

$4\frac{1}{2}$ Scheffel kosten 10 Rthlr., was 6 Scheffel?

$4\frac{1}{2} : 6 = 10 : x$ d. i. $9 : 12 = 10 : x$

$120 \mid 13\frac{1}{3}$ Rthlr.

(Das.

(Daſ. 2.) $\frac{3}{4}$ ℔ koſtet 7 ggl., was 5 ℔?

$\frac{3}{4}$ ℔ : 5 = 7 : x, d. i. 3 : 20 = 7 : x

$$\begin{array}{r|l} 140 & 46\frac{2}{3}\ \text{ggl.} \end{array}$$

2. (Daſ. 3.) Iſt das zweyte Glied ein Bruch.

2 Zentn. koſten 3 Rthlr., was $1\frac{3}{5}$ Zentner?

$2 : 1\frac{3}{5} = 3 : x$, d. i. $10 : 8 = 3 : x$

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2\frac{4}{10}\ \text{Rthlr.} \end{array}$$

3. (Daſ. 4.) Sind die beyden erſten Glieder Brüche von gleichem Nenner:

$\frac{2}{3}$ Schock koſten 9 ggl., was $4\frac{1}{3}$ Schock?

$\frac{2}{3} : 4\frac{1}{3} = 9 : x$ d. i. $2 : 13 = 9 : x$

$$\begin{array}{r|l} 117 & 58\frac{1}{2}\ \text{ggl.} \end{array}$$

(Daſ. 5.) Sind die beyden erſten Glieder Brüche von ungleichem Nenner.

$1\frac{2}{3}$ ℔ koſten 4 Rthlr, was $4\frac{1}{2}$ ℔?

d. i. $10 : 27 = 4$

$$\begin{array}{r|l} 108 & 10\frac{4}{5}\ \text{Rthlr.} \end{array}$$

Oder: $\frac{5}{3} : \frac{9}{2} = 4$ Rthlr. : x

$$\begin{array}{r|l} 108 & 10\frac{4}{5} \end{array}$$ (Daſ. 7.)

4. (Daſ. 8.) Wenn das dritte Glied allein einen Bruch hat.

2 Ell. koſten $1\frac{3}{4}$ Rthlr., was 4 Ellen?

$2 : 4 = 7 : x$

$$\frac{7}{28 \mid \frac{14}{4}} = 3\frac{1}{2}\ \text{Rthlr.}$$

Daſelbſt: 3 Loth koſten $1\frac{3}{4}$ Rthlr., was 5 Loth?

£ 5 3 : 5

3 : 5 = 7 : x

$\frac{5}{35}$ | $\frac{11\frac{2}{3}}{4}$ Rlr. d. i. $2\frac{1}{1}\frac{1}{2}$ Rlr. = 2 Rlr. 22 ggl.

Oder kürzer: (10.) 3 : 5 = 7 : x

12 : 5 = 7 : x

$\frac{5}{35}$ | $\frac{12}{2\frac{1}{1}\frac{1}{2}}$ Rtlr.

5. (Daselbst 11.) Ist das zweyte und dritte Glied ein Bruch.

3 Loth kosten $1\frac{3}{4}$ Rthlr., was $5\frac{1}{2}$ Loth?

6 : 11 = 7 : x

$\frac{7}{77}$ | $\frac{24}{3\frac{5}{24}}$ Rthlr. d. i. 3 Rthlr. 5 ggl.

6. (Das. 12.) Ist das erste und dritte Glied ein Bruch: $2\frac{1}{3}$ Ellen kosten $5\frac{1}{2}$ Rthlr., was 4 Ellen?

7 : 12 = 11 : x

$\frac{11}{132}$ | $\frac{14}{9\frac{3}{7}}$ Rthlr.
126

6

7. (Daselbst 14.) Sind alle drey Glieder Brüche von gleichen Nennern.

$1\frac{2}{3}$ Scheffel kostet $2\frac{1}{3}$ Rthlr., was $7\frac{1}{3}$ Scheffel?

5 : 22 = 7 : x

$\frac{7}{154}$ | $\frac{5}{30\frac{4}{5}}$, welches aber $\frac{30\frac{4}{5}}{3}$ Rthlr. sind, weil 7 hier $\frac{7}{3}$ Rthlr. waren. Daher kürzer:

$\frac{15}{154}$ | $10\frac{4}{15}$ Rthlr.

8. (Da-

8. (Daselbst 16.) Sind alle drey Glieder von verschiedenem Nenner.

$2\frac{1}{2}$ Loth kosten $1\frac{1}{5}$ ggl., was $3\frac{1}{4}$ Loth?

$\frac{5}{2} : \frac{13}{4} = \frac{6}{5} : x$ d. i. $20 : 26 = 6 : x$

$$\frac{5 \quad 6}{100 \quad 156} \Big| \begin{matrix} 100 \\ 1\frac{14}{25} \text{ ggl.} \end{matrix}$$

9. Es kann kommen, daß die Glieder in verschiedenen Sorten ausgedrückt sind, z. B. in ℔ und Loth, als $6\frac{1}{4}$ Loth kosten 3 ggl., was $2\frac{1}{2}$ ℔? Hier ist zu erwägen, daß 1 ℔ $= \frac{32}{3}$ ℔ und also 2 ℔ $= \frac{32}{3} \times 2$ ℔, folglich $\frac{1}{2}$ ℔ $\frac{16}{3}$ ℔ sey. Man nennt diese Zweyunddreyßigstel eines ℔ Lothe, und kann also die $2\frac{1}{2}$ ℔ in Lothe verwandeln $= 80$ Lt. Man erhält dadurch im Grunde einen unächten Bruch $= \frac{80}{32}$ ℔, wiewohl man ihn in solchen Fällen so nicht bezeichnet, sondern 80 Loth schreibt. Folglich hätten wir nun $6\frac{1}{4}$ Loth : 80 Lt. $= 3$ ggl. : x d. i.

$25 : 320 = 3 : x$

$$\frac{3}{960} \Big| \begin{matrix} 25 \\ 38\frac{10}{25} \text{ ggl.} = 1 \text{ Rthlr. } 14\frac{10}{25} \text{ ggl.} \end{matrix}$$

10. Sind daher in den Gliedern verschiedene Sorten, so bringet man sie durch Resolution zu einer Sorte.

2 ℔ kosten 4 ggl. 5 Pf., was 11 Loth?

Saget: 32 Lt. $\times$ 2 kosten 12 Pf. $\times$ 4 + 5 Pf., was 11 Lt.? d. i. 64 Lt. : 11 Lt. $=$ 53 Pf. : x

$$\begin{matrix} 64 \\ 583 \end{matrix} \Big| 9\frac{7}{64} \text{ Pf.}$$

Daß man die verschiedenen Sorten zu einerley Sorte resolvirt, geschieht deswegen, weil sie Brüche sind. Diese werden dadurch unter gleichen Nenner gebracht. So wenig ich daher $\frac{2}{3}$ und $\frac{2}{4}$, ohne sie unter gleiche Nenner zu bringen, zusammenzählen ꝛc. kann, eben so wenig kann ich hier Lt. und Quent. oder Rthlr. und ggl. als einerley ansehn und behandeln.

Es ist natürlich, daß das vierte Glied nun auch Pfennige wurden, da das dritte Glied Pfennige waren.

3 Himpten kosten 16 ggl. 6 Pf., was 10 Scheffel? d. i.

3 Himpten : 20 Himpten = 198 Pf. : x

$$\frac{20}{3960} \Big|\!\!\frac{3}{1320}$$ Pf.

Hier müssen die 1320 Pf. wieder reducirt werden, = 4 Rthlr. 14 ggl.

11. Solche Exempel können verdrüßlich zu berechnen werden, wenn große Zahlen darinnen vorkommen, wobey erstlich die vorzunehmenden Resolutionen, hernach die daraus entstehende größere Multiplication und Division, und endlich die zuletzt anzustellenden Reductionen den Rechner aufhalten.

4 Wispel 12 Scheffel und 1 Himpt. kosten 108 Rtlr. 12 ggl., was kosten 18 Wispel 3 Scheffel 1 Himpten und 3 Vierfaß?

Hier resolviret in dem ersten Gliede alles auf Himpten, macht 217 Himpten, und weil das zweyte Glied noch 3 Vierfaß enthält, so müßt ihr hier die Himpten durch die Multiplication mit 4, in Vierfaß verwandeln, = 868 Vierfaß. In dem zweyten Gliede resolviret auch alles zu Vierfaß = 3487 Vierfaß. Hierauf resolviret in dem dritten Gliede die 108 Rthlr. 12 ggl. zu lauter Groschen = 2604 ggl. Nun 3487 × 2604 = 9080148 und dividirt dieses Product durch 868, als das erste Glied, so ist der Quotient gleich 10461, welches hier ggl. seyn müssen, = 435 Rthlr. 21 ggl.

Für 2 Rthlr. 19 ggl. $9\frac{3}{4}$ Pf. erhält man 6 ℔ 25 Loth Kaffe, wie viel für 17 Rthlr. 11 ggl. 5 Pf.?

Saget:

2 Rlr. 19 gl. $9\frac{3}{4}$ Pf. : 17 Rlr. 11 gl. 5 Pf. = 6 ℔ 25 Lt. Kffe. : x

Hier werden die 2 Rthlr. 19 ggl. erst in 67 ggl., hernach in 813 Pf. resolvirt, wegen des Bruchs $\frac{3}{4}$ Pf.

aber

aber muß 813 Pfenn. noch mit 4 multiplicirt und $\frac{3}{4}$ dazu addirt werden, so erhält man alles in der Zahl 3255, welches Viertelpfennige sind.

Dann 17 Rthlr. 11 ggl. resolvirt, sind 459 ggl., zu Pfennigen resolvirt und 5 Pf. dazu addirt, sind 5513 Pf., diese mit 4 multiplicirt, wegen des ersten Gliedes, so erhält man die Zahl 22052, welches Viertelpfennige sind.

Hierauf 6 ℔ 25 Lt. in Loth resolvirt, sind 217 Loth, und nun das zweyte Glied mit dem dritten multiplicirt, giebt 4785284, und dies Product durch das erste Glied dividirt, giebt 1470, welches hier Lt. Kaffe seyn müssen, und, durch 32 reducirt, = 45 ℔ $30\frac{4}{3}\frac{3}{2}\frac{4}{5}$ Loth Kaffe geben.

12. Wer siehet nicht ein, daß solche Exempel im Grunde dasselbe sind, was wir schon bey den Regel de Tri-Exempeln mit Brüchen gehabt haben! Man bringt die Brüche hier ebenfalls unter einen Nenner, nur, statt daß wir sollten vorhin gesagt haben $\frac{2}{3}\frac{1}{2}\frac{7}{2}$ ℔ Kaffe, sagten wir: 217 Lt. Kaffe; ingleichen, statt $\frac{6}{2}\frac{7}{4}$ Rthlr., sagten wir: 67 ggl.; oder, statt $\frac{3}{2}\frac{2}{8}\frac{5}{8}\frac{2}{8}$ Rthlr., sagten wir: 3252 Pfenn. Daher wird es keinesweges hier noch nöthig seyn, viele Exempel beyzufügen; sondern das bisher Gelehrte, nebst einigem Nachdenken, wird überall Auskunft geben.

13. Dieses Exempel wäre noch umständlicher geworden, wenn wir bey den 6 ℔ 25 Lt. noch Quentchen, oder Theile von Quentchen, gehabt hätten; oder auch, wenn bey den 6 Pfunden noch Zentner gewesen wären, wo erst die Zentner mit 110 zu Pfunden hätten resolvirt werden müssen, wodurch denn das Glied noch weit größer geworden wäre; ingleichen wenn die Zahlen groß gewesen wären, z. B. statt 6 Pfund 79 Pfund ꝛc.

14. Daß nun in solchen Exempeln, Pfennige mit Lothen ꝛc. multiplicirt werden, und ihr Product durch

Pfennige

Pfennige dividirt wird, der Quotient aber wieder Lothe giebt, streitet, weder mit dem Grundsatze, daß benannte Zahlen mit benannten nicht multiplicirt werden können, noch führt es andere Bedenklichkeiten mit sich (Man vergleiche nämlich Cap. 9. XVIII. 12.).

Abkürzungen bey den Exempeln der Regel de Tri.

XII. Nach Cap. 9. XV. 3. erhält man das vierte Glied auch völlig richtig, wenn man das erste und zweyte durch eine darinnen aufgehende Zahl kleiner macht. Hierdurch wird die Multiplication und Division merklich leichter gemacht. Z. B.

8 Pfund kosten 11 Rthlr., was 64 Pfund?

8 ℔ : 64 ℔ = 11 Rthlr.
oder 1 ℔ : 8 ℔ = 11 Rthlr.

8

88 Rthlr. das Gesuchte.

Denn hier steckt 8 in 8, 1 mahl, und 8 in 64, 8 mahl; daher bleibt die Proportion dieselbe.

Oder, 92 ℔ : 138 ℔ = 12 Rthlr. : x

23 : | 4 : 6 = 12
2 : | 2 : 3 = 12

3

36 Rthlr. | 2 | 18 Rthlr.

Hier giebt 23 in 92 den Quotienten 4, und in 138 den Quotienten 6; nun giebt 2 in 4 den Quotienten 2, und in 6 den Quotienten 3, also heißen die beyden ersten Glieder 2 : 3. Man erspahrt hierdurch die größere Multiplication der 138 mit 12, und die Division durch 92. Wer Uebung hat, der übersieht leichter, ob Zahlen sich durch andere aufheben lassen und mit welchen. Sollte man erst auf das Gerathewohl hierzu Versuche machen müssen,

müssen, so würde der ganze Vortheil, der in der Abkürzung bestehen soll, wegfallen.

Ueberhaupt hilft die Uebung hierinnen einem Kopfe von den zu solchen Arbeiten gehörenden Talenten vorzüglich, wenn demselben nur erst die Arten, sich zu helfen, gezeigt worden sind.

XIII. Man kann auch das erste und zweyte Glied zu diesem Behufe mit einerley Zahl multipliciren. Z. B.

3 ℔ : 5 ℔ = 16 Rthlr. : x Rthlr.
2 2

6 ℔ : 10 ℔ = 16 Rthlr.

10 | 6
160 | 26⅔ Rthlr.

Hier erspahrten wir dadurch, daß 5 in 10 verwandelt ward, die umständlichere Multiplication der 16 mit 5.

XIV. Durch Hülfe der Zerstreuung (Cap. 7. III. 12.) lassen sich manche weitläufige Multiplicationen erspahren, und folglich auch die Regel de Tri-Exempel abkürzen.

6 ℔ kosten 9 Rthlr., was 11 ℔ 14 ℔.?

Saget: 6 ℔ : 11 ℔ 14 ℔. = 9 Rthlr. : x Rthlr.

11

99 Rtlr.

14 ℔. { 8 ℔. = ¼ = 2 ‧ 6 ggl. — Pf.
4 ‧ = ½ von ¼ = 1 ‧ 3 ‧ — ‧
2 ‧ = ½ von ⅛ = — ‧ 13 ‧ 6 ‧

102 Rtlr. 22 ggl. 6 Pf.
6 : 17 Rtlr. 3 ggl. 9 Pf.

1. Es wird, um 9 Rtlr. hier mit 11 ℔ 14 ℔. zu multipliciren, zuerst 9, 11 mahl genommen, gab = = 99 Rtlr.
Dann, weil 8 ℔. = $\frac{1}{4}$ ℔, ward
9 durch 4 dividirt = = 2 = 6 ggl.
und weil 4 ℔. = $\frac{1}{2}$ von $\frac{1}{4}$, ward
das vorige durch 2 dividirt = 1 = 3 =
und weil 2 ℔. = $\frac{1}{2}$ von 4 ℔. sind,
ward das vorige durch 2 dividirt — = 13 = 6 Pf.

dieses mußte summirt werden, gab 102 Rlr. 22 ggl. 6 Pf.
und durch das erste Glied 6 div. gab 17 Rlr. 3 ggl. 9 Pf.
als das Gesuchte.

Wäre nämlich das zweyte Glied 12 ℔ gewesen, so wären 9 Rthlr. noch einmahl, folglich 12 mahl genommen worden, so aber nur noch $\frac{1}{3}\frac{4}{2}$ mahl.

2. Wären Quentchen dabey gewesen, so ward die Rechnung nicht viel umständlicher:

6 ℔ : 11 ℔ 14 ℔. 3 Quentch. = 9 Rlr. : x Rlr.

11
99 Rlr.

14 ℔. { 8 ℔. = $\frac{1}{4}$ = 2 = 6 gl. — Pf.
4 = = $\frac{1}{2}$ von $\frac{1}{4}$ = 1 = 3 = — =
2 = = $\frac{1}{2}$ von $\frac{1}{8}$ = — = 13 = 6 =
3 Qu. { 2 Qu. = $\frac{1}{4}$ von 2 ℔. = — = 3 = $4\frac{1}{2}$ =
1 Qu. = $\frac{1}{2}$ von 2 Qu. = — = 1 = $8\frac{1}{4}$ =

103 Rlr. 3 gl. $6\frac{3}{4}$ Pf.
6 : = 17 Rr. 4 gl. $7\frac{3}{4}$ Pf.

3. Sind in dem zweyten und dritten Gliede mehrere Sorten, so kann man sie vermittelst der Zerstreuung alle mit einander multipliciren. Z. B. 3 ℔ kosten 6 Rthlr. 12 ggl., was 14 ℔ 8 ℔.?

3 ℔ : 14 ℔ 8 ℔. = 6 Rtlr. 12 ggl. : x

6

a) = 84 Rtlr.

12 gl. = ½ Rtlr. = b) = 7 =

8 ℔. = ¼ ℔ = c) = 1 = 12 gl.

8 = = ¼ ℔ = d) = — = 3 =

92 Rtlr. 15 gl.

3 : 30 Rtlr. 21 gl. das Gesuchte.

Hier ward 1) in a 14 ℔ mit 6 Rtlr. multiplicirt, d. i. 6 mahl genommen; dann ward in b 14 ℔ ½ mahl genommen, d. i. mit den 12 ggl. multiplicirt. Auf diese Art war 14 mit 6 Rtlr. und 12 ggl. multiplicirt. Darauf mußte nun noch 8 ℔. mit 6 Rtlr. und 12 ggl. gleichfalls multiplicirt werden, oder, welches einerley ist, 6 Rtlr. 12 ggl. mit 8 ℔., d. i. sie mußten ¼ mahl genommen werden, weil 8 ℔. = ¼ ℔ ist. Daher ward in c 6 Rtlr. ¼ mahl genommen, eben so in d 12 ggl. ¼ mahl. In die Summe dieser Quotienten, oder das Product 92 Rtlr. 15 ggl. ward mit 3 dividirt, welches das Gesuchte zu 30 Rtlr. 21 ggl. richtig angab.

5 ℔ kosten 7 Rtlr. 4 ggl. was 12 ℔ 9 ℔.?

5 ℔ ; 12 ℔ 9 ℔. = 7 Rtlr. 4 gl. ; x

7

84 Rtlr.

4 gl. = ⅙ Rtlr. = 2 =

9 ℔. { ¼ = = 1 = 18 gl. ; ⅛ von ¼ = — = 5 = 3 Pf. } von 7 Rtlr.

9 ℔. { ¼ = — = 1 = — = ; ⅛ von ¼ — = — = 1½ = } von 4 gl.

5 : 88 Rlr. — gl. 4½ Pf.

17 Rlr. 14 gl. 5 7/10 Pf. das Gesuchte.

Hier ward erstlich 12 ℔ mit 7 Rthlr. multiplicirt, = 84 Rthlr.; dann mit 4 ggl. vermittelst der Division, weil 4 ggl. = ⅙ Rthlr. ist = 2 Rthlr. Darauf ward

9 Lt. zerstreuet in 8 Lt. und 1 Lt. Es sind 8 Lt. = $\frac{1}{4}$ ℔ und 1 Lt. = $\frac{1}{8}$ von $\frac{1}{4}$ ℔, dahero wurde von 7 Rthlr. erst $\frac{1}{4}$ genommen = 1 Rthlr. 18 ggl., und von diesen hernach $\frac{1}{8}$ = 5 ggl. 3 Pf. Eben so von 4 ggl. erst $\frac{1}{4}$ = 1 ggl. und davon hernach $\frac{1}{8}$ = 1 $\frac{1}{2}$ Pf. Von allen war die Summe = 88 Rtlr. — ggl. 4 $\frac{1}{2}$ Pf. Diese dividirt durch das erste Glied 5, gab 17 Rtlr. 14 gl. 5 $\frac{7}{10}$ Pf.

Bey der Division mit 5 mußte hier bey den 4 $\frac{1}{2}$ Pf. in 28 Pf. mit 5 dividirt werden, welches 5 $\frac{2}{5}$ Pf. gab. Weil nun aber noch mit 5 in $\frac{1}{2}$ dividirt werden mußte, welches gleich $\frac{1}{10}$ Pf. war, so mußten $\frac{3}{5}$ Pf. und $\frac{1}{10}$ Pf. noch addirt werden = $\frac{7}{10}$. Um diese Umstände zu vermeiden, so multiplicirt gleich den ganzen Dividendus mit 2, so kommt der Bruch $\frac{1}{2}$ Pf. weg, als:

88 Rtlr. — ggl. 4 $\frac{1}{2}$ Pf.

2

5 | 176 Rtlr. — ggl. 9 Pf. folglich auch den
$\frac{2}{10}$: 17 Rtlr. 41 ggl. 5 $\frac{7}{10}$ Pf. Divisor mit 2.

XV. Vier Rthlr. geben 4 ℔ 8 Lt., was geben 15 Rthlr. 12 ggl.?

4 Rtlr. : 15 Rtlr. 12 gl. = 4 ℔ 8 Lt. : x

15

60 ℔

$\frac{1}{2}$	2 =	2 =	
$\frac{1}{4}$	4 =	3 =	24 Lt.
$\frac{1}{4}$	4 =	— =	4 =
4 :		65 ℔	28 Lt.

16 ℔ 15 Lt. das Gesuchte.

1. Hier wurden alle Sorten des zweyten und dritten Gliedes vermittelst der Zerstreuung mit einander multiplicirt. Nämlich: 1) 4 Pfund 15 mahl, d. i. 60 Pfund. 2) 4 Pfund $\frac{1}{2}$ mahl (d. i. mit den 12 ggl. = $\frac{1}{2}$ Rthlr. multiplicirt) genommen, ist 2 Pfund. 3) Die 15 Rthlr. denket euch hier als 15 Pfund, dividiret darinnen mit 4 (d. i.

(d. i. multiplicirt sie mit 16 Loth, d. i. $\frac{1}{4}$ Pfund), giebt 3 Pfund 24 Loth. 4) Die 12 ggl. (d. i. $\frac{1}{2}$ Rthlr.) denket euch als $\frac{1}{2}$ Pfund, d. i. als 16 Loth, dividiret darinnen mit 8 Loth, d. i. $\frac{1}{4}$ Pfund, oder mit 4, giebt 4 Loth.

2. Nun addiret 60 Pfund, 2 Pfund, 3 Pfund 24 Loth und 4 Loth geben 65 Pfund 28 Loth, darinn mit 4 dividirt, giebt das Gesuchte mit 16 Pfund 15 Loth.

3. Wollet ihr euch aber bey Nr. 3. die 15 Rthlr. nicht als Pfunde gedenken, so saget: 8 Loth 15 mahl, giebt 3 Pfund 24 Loth, oder: $\frac{1}{4}$ Pfund 15 mahl, giebt 3 Pfund 24 Loth. Ingleichen, wollet ihr bey Nr. 4. euch die 12 gl., oder den $\frac{1}{2}$ Rthlr., nicht als $\frac{1}{2}$ Pfund gedenken, so saget 8 Loth $\frac{1}{2}$ mahl giebt 4 Loth; oder: $\frac{1}{4}$ Pfund, $\frac{1}{2}$ mahl ist $\frac{1}{8}$ Pfund, auch 4 Loth. Denn es würde ganz fehlerhaft seyn, hier mit den 8 Loth in 12 zu dividiren, und zu sagen: 4 in 12, 3 mahl, gäbe 3 Loth.

4. Ihr könnt auch so verfahren: 8 Loth, d. i. 4 in 15, giebt 3, d. i. 3 Pfund, in die Quotienten; Rest 3, welche als 3 Pfund = 96 Loth sind; dazu die 12 gl. als $\frac{1}{2}$ Pfund addirt, giebt 96 + 16 Lt. = 112 Lt. Darinnen abermahl mit 4 dividirt, giebt in die Quotienten 28, als 28 Loth, wie vorhin. Nun versteht es sich, daß nicht in die 12 gl. noch einmahl besonders dividirt werde. Die Posten stehen nun so:

60 ℔
2 "
3 " 28 Lt.

65 ℔ 28 Lt.
4 : 16 ℔ 15 Lt. wie vorhin.

Jede Art zu verfahren ist richtig; nur muß bey Exempeln dieser Art, da man das Gesuchte in Pfunden erhalten soll, auf die Bedingung bey Nr. 3. und 4. wohl Acht gegeben werden, weswegen wir dies hier ein für allemahl erinnern.

XVI. Die Rechnung mit Hülfe der Zerstreuung wird sehr erleichtert, wenn man die Zerstreuung bey den Sorten so einrichten kann, daß die formirenden Brüche $\frac{1}{2}$ werden, weil man alsdann von dem letztern Posten stets ein halb nimmt, um den folgenden zu erhalten, welches sehr leicht ist.

Fünf und zwanzig Pfund kosten 30 Rthlr. 21 gl., was 160 Pfund 28 Lt.?

d. i. 25 ℔ : 160 ℔ 28 Lt. = 30 Rtlr. 21 gl. : x

30

4800 Rtlr.

21 gl.	12	$\frac{1}{2}$	=	80	=	
	6	$\frac{1}{2}$	=	40	=	
	3	$\frac{1}{2}$	=	20	=	
28 Lt.	16	$\frac{1}{2}$	=	15	=	10 gl. 6 Pf.
	8	$\frac{1}{2}$	=	7	=	17 = 3 =
	4	$\frac{1}{2}$	=	3	=	20 = $7\frac{1}{2}$ =

25 : 4967 Rtlr. — gl. $4\frac{1}{2}$ Pf.

198 Rtlr. 16 gl. $4\frac{1}{10}$ Pf. d. Gesuchte.

Hier ward von 160 genommen $\frac{1}{2}$ = 80; von 80 wieder $\frac{1}{2}$ = 40; von 40 wieder $\frac{1}{2}$ = 20, u. s. w. wodurch die Arbeit äußerst leicht wird.

XVII. Sind viel kleine Sorten in einem Exempel, so wird die Rechnung etwas umständlicher, insonderheit wegen der Brüche, die alsdann unvermeidlich sind.

Sechs Pfund kosten 15 Rthlr. 7 ggl. 7 Pf., was 20 Pfund 4 Loth 2 Quentchen?

6 ℔ : 20 ℔ 4 Lt. 2 Qut. = 15 Rtlr. 7 gl. 7 Pf. : x

15

300 Rtlr.

7 gl.	6 | 1/4	5 =				in 20 ℔.
	1 | 1/6	— =	20 gl.			
7 Pf.	6 | 1/2	— =	10 =			in 20 ℔.
	1 | 1/6	— =	1 =	8 Pf.		
4 Lt.	1/8	1 =	21 =	11 3/8 =		in 15 Rlr. 7 gl. 7 Pf.
2 Q.	1/8	— =	5 =	8 5/6 9/4 =		in 15 Rlr. 7 gl. 7 Pf.

6 : 308 Rlr. 11 gl. 4 1/6 9/4 Pf.

51 Rlr. 9 gl. 10 8/1 2/1 5/5 2/2 Pf.

Hier machte es schon mehrere Umstände bey den 2 Qu., wo 8 in 1 Rtlr. 21 gl. 11 3/8 Pf. dividirt ward, den Quotienten 5 gl. 8 5/6 9/4 Pf. zu finden, und hernach in die ganze Summe mit 6 zu dividiren, um die 10 8/1 2/1 5/5 2/2 Pf. heraus zu bringen; wiewohl dem, der die Rechenkunst recht inne hat, dieser und ähnliche Fälle nur ein Spielen-Gehen ist.

1. Es war natürlich, daß, nachdem 20 Pfund mit 15 Rthlr. multiplicirt worden waren, die 20 erstlich auch mit 7 gl. multiplicirt, d. h. (weil die 7 gl. in 1/4 Rtlr. und in 1/6 von 1/4 Rtlr. zerstreuet worden waren) mit 1/4 und der Quotient dieses 1/4 mit 1/6 dividirt werden mußten. Zweytens mußte 7 ggl. 7 Pf. mit 4 Loth multiplicirt, d. h. (weil 4 Loth = 1/8 ℔ ist) mit 1/8 dividirt werden. Drittens mußten eben diese 7 gl. 7 Pf. durch 2 Quent. multiplicirt, d. h. (weil 2 Quent. = 1/8 von 4 Lt. sind) es mußte der letztere Quotient von den 4 Lt. = 1 Rtlr. 21 gl. 11 3/8 Pf. durch 8 dividirt werden u. s. w.

2. Weit umständlicher ward diese Berechnung, wenn man dieselbe ohne die Zerstreuung hätte vornehmen wollen:

6 ℔ : 20 ℔ 4 ℔. 2 Qu. = 15 Rtlr. 7 gl. 7 Pf. : x

32	32	24		4411 Pf.
192 ℔.	20	60		2578 Qu.
4	640 ℔.	30		35288
768 Qu.	4 =	360 gl.		30877
	644 ℔.	7 =		22055
	4 =	367 gl.	12)	8822
	2576 Qu.	6 =		11371558
	2 =	2202		768:::
	2578 Qu.	2		3691:::
		4404 Pf.		3072:::
		7 =		6195::
		4411 Pf.		6144::
				5158
				4608
				550

768
14806 5/7 5/68 Pf.

diese noch zu Rtlr. u. gl. reducirt, geben das vorige.

3. Zuweilen trägt es sich zu, daß man bey solchen Rechnungen so viele Brüche erhält, daß man, um sie zuletzt zu addiren, erst einen General-Nenner dazu suchen muß.

XVIII. Bisher war das erste Glied stets von der größten Sorte der andern Glieder, und es ward zuletzt daher eben das erhalten, was das erste Glied war, indem bey der Multiplication der mittlern Glieder unter einander durch die Zerstreuung stets die kleinern Sorten auf die größte Sorte gebracht wurden. Z. B. das erste Glied hieß Rthlr. und wir bekamen daher das Gesuchte wieder in Rthlr. Wir wollen aber annehmen, das erste Glied sey eine geringere Sorte von den vorhandenen Sorten der andern Glieder. Z. B.

12 ggl. geben 4 Pfund 16 Loth, was geben 5 Rthlr. 12 ggl.? d. i.

12 gl.: 5 Rtlr. 12 gl. = 4 ℔ 16 Lt. : x

5

20 ℔

½ = 2 =

½ = 2 = 16 Lt.

½ = — = 8 =

24 ℔ 24 Lt.

2 × 49 ℔ 16 Lt. das Gesuchte.

1. Hier ward mit der 2 des ersten Gliedes das Product des zweyten und dritten multiplicirt.

2. Nimmt man nämlich an, das erste Glied heiße 1 Rthlr., oder das Product des zweyten und dritten Gliedes sollte durch 1 dividirt werden, so blieb 24 Pfund 24 Loth unverändert und war das Gesuchte. Es soll hier aber 24 Pfund 24 Loth nur durch die Hälfte von 1 Rthlr. d. i. 12 ggl. getheilt werden, folglich muß es noch einmahl so groß werden, d. i. es muß mit 2 multiplicirt werden: denn ist 1 in 24 Pfund und 24 Loth, Einmahl, so ist ½ darinnen 2 mahl.

3. Daraus folgt für solche Fälle die Regel: Verwandelt die niedere Sorte in einen Bruch der höchsten Sorte, z. B. 12 ggl. in ½ Rthlr. und multiplicirt mit seinem Nenner

Nenner (hier 2) den Dividendum, so giebt das erhaltene Product das Gesuchte in der größten Sorte.

4. Wollten wir das nicht thun, so können wir hier die 12 ggl. als einen Bruch von 24teln, gleich $\frac{12}{24}$ ansehen, mit dem Nenner 24 jenen Dividendum multipliciren und mit dem Zähler 12 das nun erhaltene Product dividiren, so giebt der Quotient das Gesuchte in der größten Sorte an.

Der Dividendus war vorhin 24 Pfund 24 Loth; diese mit 24 multiplicirt, gab 594 Pfund; in diese mit 12 dividirt, gab 49 Pfund 16 Loth, wie vorhin. Denn da nicht mit 12 Rthlr., sondern mit 12 ggl. dividirt werden sollte, so würde, wenn wir mit 12 gleich dividiren wollten, der Quotient um 24 mahl zu klein werden, weil 1 ggl. $= \frac{1}{24}$ Rthlr. ist. Daher muß erst der Dividendus mit 24 multiplicirt werden. Wollten wir aber dieser Umstände überhoben seyn, so mußten wir gleich mit einer Zahl dividiren, welche $\frac{12}{24}$ von 12 ist, diese ist aber $\frac{1}{2}$; und 24 Pfund 24 Loth dividirt durch $\frac{1}{2}$, ist 49 Pfund 16 Loth, welches uns eben dahin bringt, wo wir vorher waren.

5. 8 Lt. kosten 11 Rthlr. 8 gl., was 20 ℔ 16 Lt.?

20

220 Rtlr.

$\frac{1}{2}$ = 5 = 16 gl.

$\frac{1}{3}$ = 6 = 16 =

2 Lt. d. i. $\frac{1}{4}$ ℔ d. i. 4. 232 Rtlr. 8 gl.

929 Rtlr. 8 gl. das Gesuchte.

6. Hätte das obige Exempel geheißen:

12 gl. 4 Pf. geben 4 ℔ 16 Lt., was 5 Rtlr. 12 gl.?

d. i. 12 gl. 4 Pf. : 5 Rtlr. 12 gl. = 4 ℔ 16 Lt. : x.

so hätten wir, wie vorhin, die Rechnung auf 12 gl. allein machen können. Da aber 4 Pf. von 12 gl. $\frac{1}{36}$ ist, und $\frac{1}{37}$ von dem jetzigen Divisor wird, so hatten wir nur

von

von dem Quotienten $\frac{1}{3\,7}$ zu suchen; das war 1 Pfund $10\frac{3\,0}{3\,7}$ Lt., dieses hernach von dem dortigen Quotienten abgezogen, so erhielten wir gleich das Gesuchte mit 48 Pfund $5\frac{7}{3\,7}$ Lt.

7. Wir hätten aber auch gleich 12 gl. 4 gl. zu einem Bruche $= \frac{1\,4\,8}{2\,8\,8}$ Rthlr. (denn 1 Pf. $= \frac{1}{2\,8\,8}$ Rthlr.) machen können. Darauf multiplicirten wir den Dividendus 24 Pfund 24 Loth mit 288, gab 7128, darinn mit 148 dividirt, giebt $48\frac{2\,4}{1\,4\,8}$ Pfund, d. i. 48 Pfund $5\frac{7}{3\,7}$ Lt. wie vorhin.

XIX. Diese letztern Bemerkungen führen uns auf den Fall, wenn alle drey gegebenen Glieder, und folglich auch noch das dritte Glied mehrere Sorten bey sich führet. Wir erhalten aus der letztern Anmerkung dazu die Regel: Man verwandle das erste Glied in einen unächten Bruch von dem Nenner, worinnen die Eins der größten Sorte bey den andern Gliedern in die daselbst vorhandenen kleinsten zerlegt wird; z. B. hat das zweyte oder dritte Glied Rthlr. und ggl., so verwandele man das erste, wenn es aus Gelde besteht, in 24stel Rthlr., das sind ggl.; hat ein anderes Quentchen bey sich, so verwandle man das erste Glied in Quentchen, wenn es aus Gewicht besteht, d. i. in 128stel Pfund. Bestünde das erste aus Zentnern, das zweyte oder dritte hätte aber Quentchen bey sich, so wäre das erste in 13080tel eines Zentners zu resolviren, d. i. in Quent. Ist nun das geschehen, so multiplicire man das zweyte, oder dritte, Glied mit der Zahl dieses Nenners, und verfahre übrigens, wie bishero gezeigt ist.

4 ggl. 8 Pf. geben 9 Pfund 18 Lt., was 20 Rtlr. 4 ggl.?

4 ggl. 8 Pf. : 20 Rtlr. 4 ggl. = 9 ℔ 18 Lt. : x.

48	12)		24)
8		480	
56		4	
		484	6)
		2904	2)
		5808	9)
		52272	
18 Lt. { 8	1/2	1452	
18 Lt. { 8		1452	
18 Lt. { 2	1/4	363	
56 :		55539	| 991 4/56 ℔ (= 991 ℔ 24 4/7 Lt.).

1. Hier resolvirten wir 4 ggl. 8 Pf. zu 56 Pf. Die 20 Rthlr. 4 ggl. resolvirten wir erst mit 24 zu ggl. und dann mit 12 zu Pf., ehe wir die Zerstreuung des dritten Gliedes vornahmen. Und da wir die Lothe in Theile 1 Pfund zerstreuten, so mußten wir zuletzt Pfunde erhalten.

2. Wir konnten auch noch kürzer verfahren (nach XVIII. 1. 5.).

Setzet:

4 gl. 8 Pf. : 20 Rtlr. 4 gl. = 9 ℔ 18 Lt. : x.

		20	
		180 ℔	
16 Lt. { 1/2	=	10	=
2 = { 1/8	=	1	= 8 Lt.
4 gl. | 1/8	=	1	= 19 =
4 gl. : d. i. 6		192 ℔	27 Lt.
		1157 ℔	2 Lt.
7 :		165 =	9 3/7 =

991 ℔ 24 4/7 Lt. wie vorhin.

Hier

Hier nahmen wir an, das erste Glied sey blos 4 ggl. Daher ward 192 Pfund 27 Loth mit 6 (= $\frac{1}{6}$ Rlr.) multiplicirt. Weil nun aber im erstern Gliede noch 8 Pf. vorhanden sind und 8 Pf. von 4 gl. 8 Pf. $\frac{1}{7}$ beträgt, so dividirten wie mit 7 in 1157 Pfund 2 Loth, und den Quotienten 165 Pfund $9\frac{3}{7}$ Loth zogen wir davon ab, so erhielten wir das Gesuchte, wie vorhin.

3. Wir hätten auch die Multiplication mit 24 und darauf mit 12 zuletzt vornehmen können. Als:

4 gl. 8 Pf.: 20 Rtlr. 4 gl. = 9 ℔ 18 Lt.: x.

: 20

: 180 ℔

: 4 gl. $\frac{1}{6}$ = = 1 = 16 Lt.

18 Lt.: { 8 = $\frac{1}{4}$ = = 5 = — = / 8 = 1 = = 5 = — = / 2 = $\frac{1}{4}$ = = 1 = 8 =

4 gl. $\frac{1}{6}$ = = — = 3 = | $\frac{1}{6}$ von 18 Lt.

192 ℔ 27 Lt. × 6.

1157 = 2 = 4.

4628 = 8 = 6.

27769 = 16 = 2.

55539 = — =

56 | 504 : | 99 $1\frac{4}{5}\frac{3}{6}$ ℔, wie vorhin.

513 :

504 :

9

56

43

Um mit 18 Lt. in die 4 gl. zu dividiren, saget $\frac{1}{6}$ von 18 Lt., d. i. 6 in 18 Lt. 3 mahl, d. i. 3 Lt.

4. Hätte das zweyte, oder dritte Glied noch einen Bruch bey sich, so versteht es sich, daß das erste Glied auch noch mit dem Nenner dieses Bruchs multiplicirt wird.

4. Wären

5. Wären gleich im dritten Gliede blos Lothe, so müssen wir doch durch die Zerstreuung der Lothe in Theile eines Pfundes zuletzt das Gesuchte in Pfunden erhalten, und es bedarf keiner Reduction:

4 gl. 8 Pf. : 20 Rtlr. 4 gl. = 18 Lt. : x

12) 24)

56. 484 12)

5808

18 Lt. { 8 | ¼ = 1452
8 | 1 = 1452
2 | ¼ = 363

3267 | 58 2/5 Lb

56 : 280 :

467

448

19

Hier ward das zweyte Glied 5808 nicht mit 18 multiplicirt, sonst hätten wir zuletzt Lothe erhalten; sondern mit 1/3 8/2, indem wir das zweyte Glied zweymahl ¼ mahl und zuletzt 1/16 mahl nahmen. Es ist aber 1 Pfund ¼ mahl genommen, so viel als mit 8 Lt. multiplicirt, und ¼ mahl 2 mahl genommen, ist dasselbe mit 16 Lt., und mit ¼ von 16 Lt., oder 1/16 Pfund mahl genommen, ist mit 2 Lt. multiplicirt.

XX. Hat das erste Glied (oder ein anderes) einen Bruchweise ausgedrückten Bruch bey sich, so verfahret nach den für diese Fälle ertheilten allgemeinen Regeln. Als:

3 2/5 Pfund kosten 24 Rthlr. 10 ggl. 9 Pf., was 12 5/8 Pfund?

3 2/5 Lb

$3\frac{2}{5}$ ℔ : $12\frac{1}{8}$ ℔ = 24 Rlr. 16 gl. 9 Pf. : x. 5)

5)		123	= 11	= 9	= 6)
17	:	740	= 22	= 6	= 2)
	:	1481	= 21	= —	=
$\frac{4}{8}$	2.	61	= 17	= $10\frac{1}{2}$	=
$\frac{1}{8}$	4.	15	= 10	= $5\frac{5}{8}$	=
17	:	1559	= 1	= $4\frac{1}{8}$	=

91 Rtlr. 17 gl. — $\frac{3\,3}{1\,3\,6}$ Pf.

Wegen der Fünftel Pfund bey dem ersten Gliede mußte das zweyte, oder dritte, auch zu Fünfteln gemacht werden (hier war das dritte das bequemste). Hernach ward die Multiplication mit 12 und die Zerstreuung aus $\frac{5}{8}$ Pfund in 123 Rthlr. 11 ggl. 9 Pf. vorgenommen.

5 Pfund $3\frac{1}{2}$ Loth kosten 11 Rthlr. 6 gl. 4 Pf., was 30 Pfund 6 Loth $3\frac{1}{2}$ Quentchen?

5 ℔ 3 Lt. 2 Q. : 30 ℔ 6 Lt. $3\frac{1}{2}$ Q. = 11 Rlr. 6 gl. 4 Pf. ; x

40.	8)	240.	8)		
163.	4)	966.	4)		
654.	4)	3867.	4)		
1308.	2)	7735.	2)		
		7735.			
		7735	=		
∴ 6 gl.	$\frac{1}{4}$	= 1933	= 18	=	
4 Pf.	$\frac{1}{6}$	= [322	= 7	=]	
	$\frac{1}{3}$	= 107	= 10	= 4	=
		87126	= 4	= 4	=

1308 : 66 Rlr. 14 gl. $7\frac{2}{3}\frac{4}{2}\frac{7}{7}$ Pf.

1. Hier ward, da 7735 mit 11 multiplicirt werden sollte, der Factor 11 gleich 10 + 1 angesehen, und folglich 7735 um eine Stelle linker Hand hinausgerückt (als mit 10 multiplicirt) und noch einmahl darunter gesetzt. Da mit 18 in 1933 = 18 = dividirt werden sollte, so ward erst

erst mit 6 dividirt und hernach in diesen Quotienten mit 3 dividirt. Eben deswegen konnte auch der Quotient von 6, als 322 . 7. nicht mit zusammen addirt werden, sondern ward in Klammern eingeschlossen.

2. Es ist wohl nicht nöthig zu bemerken, daß bey der Division der 4 in 7735 der Rest 3, als $\frac{3}{4}$ Rthlr. hier angesehn, und folglich als 18 gl. eingetragen werden müsse, weil man hier Rthlr. und gl. summirt (XV. 4.).

$16\frac{3}{8}$ Pfund kosten 4 Rthlr. 3 gl., was $10\frac{1}{4}$ Pfund?

$16\frac{3}{8}$ ℔ : $10\frac{1}{4}$ ℔ = 4 Rtlr. 3 gl. : x.

131. : ... 82
: 4
: 328 :
3 gl. | $\frac{1}{8}$ .... 10 : 6 :
131 : 338 : 6 : | 2 Rtlr. das Gesuchte
: 262
: 76 Rtlr. Rest. und
: 456 + 6 gl.
: 1830 13 gl.
: ... 131 :
: 520
: 393 und
: 127 gl. Rest
: 762
: 1524 $11\frac{2}{131}$ Pf.
: .... 131 :
214
131
83

3. $16\frac{4}{5}$ Pfund kosten 9 Rthlr. 11 gl. $6\frac{1}{2}$ Pf., was 80 Pfund 4 Loth $1\frac{1}{2}$ Quentchen? d. i.

$16\frac{4}{5}$ ℔ : 80 ℔ 4 Lt. $1\frac{1}{2}$ Qu. = 9 Rtlr. 11 gl. $6\frac{1}{2}$ Pf. : x.

84 — 5)

3760 = 47 Rtlr. 9 gl. $8\frac{1}{2}$ Pf.

9 gl. { $\frac{3}{4}$ 20 = ; $\frac{1}{2}$ 10 =

8 Pf. { $\frac{1}{6}$ 1 = 16 = ; $\frac{1}{3}$ — = 13 = 4 =

$\frac{1}{2}$ Pf. | $\frac{1}{4}$ — = 3 = 4 =

4 Lt. | $\frac{1}{8}$ 5 = 22 = $2\frac{8}{16}$ =

1 Qu. | $\frac{1}{16}$ { 4 [1 = 11 = $6\frac{4}{16}$ =] ; 4 — = 8 = $10\frac{16}{5}\frac{8}{16}$ =

$\frac{1}{2}$ Qu. | $\frac{1}{2}$ — = 4 = $5\frac{1}{5}\frac{6}{16}\frac{8}{2}$ =

84 : 3798 = 20 = $2\frac{28}{5}\frac{3}{12}$ =

45 Rtlr. 5 gl. $4\frac{5}{9}\frac{4}{0}\frac{3}{3}\frac{5}{16}\frac{4}{8}\frac{3}{8}$ Pf. das Gesuchte.

Hier konnte das erste Glied nicht füglich in Lothe und Quentchen resolvirt werden, weil man sonst doch einen Bruch in Quentchen zuletzt erhalten haben würde, wodurch die Rechnung umständlicher geworden seyn würde. Dahero ward das erste Glied zu einem unächten Bruche von Fünfteln gemacht und das dritte Glied durch 5 multiplicirt.

Bey dem einen Quentchen, welches $\frac{1}{16}$ von 4 Loth ist, hätte mit 16 in 5 Rthlr. 22 gl. $2\frac{8}{16}$ Pf. dividirt werden müssen. Dafür ward mit 4 dividirt und dieser Quotient abermahls durch 4 dividirt. Es ward aber eben deswegen der erstere Quotient 1 Rthlr. 11 gl. $6\frac{4}{16}$ Pf. in Klammern eingeschlossen, und hernach nicht mit zu den Posten addirt.

4. Bey dem letztern Exempel entstanden die Brüche $\frac{9}{16}$, $\frac{160}{256}$, $\frac{160}{256}$ Pf., welche addirt werden mußten, wodurch

durch die Arbeit etwas umständlicher wird, wiewohl dieses Geübten nicht schwer fallen kann.

5. Zuletzt ward durch die Division mit 84 das Gesuchte erhalten nebst dem großen Bruche. Man findet in vielen Anweisungen zur Rechenkunst die Exempel so ausgesucht, daß sie ohne in denselben entstehende Brüche eine kürzere Berechnung geben. Hier ist aber ein schwereres Exempel mit Fleiß ausgesucht worden.

XXI. Es kann der Fall eintreten, daß, außer, daß in einem Gliede ein Bruch einer gegebenen Sorte vorhanden ist, noch einige Theile der grössern Sorte in bestimmten gangbaren Theilen nach dem Namen einer niedern Sorte gegeben sind. Z. B. 2 Pfund 7 Loth kosten 5 Rthlr. 8 ggl. 3 Pf. was $3\frac{3}{4}$ Zentner 2 Pfund 10 Loth 2 Quentchen? Man thut am besten, in solchen Fällen diese so übel mit einander verbundenen Sorten jedesmahl einzeln zu berechnen, und zuletzt das Gefundene zusammen zu addiren, woraus hier eine doppelte Anwendung der Regel de Tri entstehet. Als:

Erstlich

Erstlich: 2 Pfund 7 Loth kosten 5 Rthlr. 8 ggl. 9 Pf. was $3\frac{3}{4}$ Zentner?

2 lb. 7 Lt. : $3\frac{3}{4}$ Zntn. = 5 Rtlr. 8 gl. 9 Pf. : x

71 Lt. | 15
4 | 110
284 | 150
15
1650 = 8
13200 = 4
52800 = 5 Rtlr.
264000 Rtlr.
8 gl. | $\frac{1}{3}$ = = 17600 =
9 Pf. { 6 Pf. | $\frac{1}{16}$ = = 1100 =
3 Pf. | $\frac{1}{2}$ = = 550 =
283250 Rtlr.

284 : 2556 : : | 997 Rlr.
2765 :
2556 :
2090
1988
102. 6
612. 4
2448 gl.
2272 | 8 gl.
176. 6
1056. 2
2112 Pf.
1988 | 7 Pf.
124
284 Pf.

macht: 997 Rlr. 8 gl. $7\frac{1}{2}\frac{2}{8}\frac{4}{4}$ Pf.

Zweytens. 2 ℔ 7 Lt. kosten 5 Rlr. 8 gl. 9 Pf., was 2 ℔ 10 Lt. 2 Qu.

2 ℔ 7 Lt. : 2 ℔ 10 Lt. 2 Qu. = 5 Rlr. 8 gl. 9 Pf. : x

71 Lt. 4 — 74. 4.

284. : ... 298. 5.

: 1490 Rlr.

8 gl. | $\frac{1}{3}$ = 99 = 8 gl.

9 Pf. { 6 Pf. | $\frac{1}{16}$ = 6 = 5 =
3 = | $\frac{1}{2}$ = 3 = 2 6 Pf.

1598 Rlr. 15 gl. 6 Pf.

284 : 5 Rlr.

: 1420

: 178. 6

: 1068. 4

: ... 4287 gl. | 15 gl.

: 284

: 1447

: 1420

: 27. 6

: 162. 2

: ... 330 Pf. | 1 Pf.

284

$\frac{46}{284}$ Pf. macht 5 Rlr. 15 gl. 1 $\frac{46}{284}$ Pf.

Nro. 1. gab 997 Rlr. 8 gl. 7 $\frac{124}{284}$ Pf.
= 2. = 5 = 15 = 1 $\frac{46}{284}$ =

Summa 1002 Rlr. 23 gl. 8 $\frac{170}{284}$ Pf. als das Gesuchte.

1. In der erstern Berechnung nahmen wir die $\frac{1}{4}$ Zent. als ganze Zentn. an; daher wurden auch die 71 Lt. mit 4 multiplicirt.

XXII. Wenn das zweyte Glied von einer ähnlichen Beschaffenheit, als das dritte, gewesen wäre, so wäre

das

das Verfahren noch zusammengesetzter geworden. Wir wollen, der Kürze wegen, das vorige Exempel beybehalten. Es soll aber nun heißen: 2 ℔ 7 Lt. kosten $5\frac{3}{5}$ Rtlr. 8 gl. $9\frac{1}{2}$ Pf., was $3\frac{3}{4}$ Zent. 2 ℔. 10 Lt. 2. Quent.?

Saget hier, erstlich: 2 ℔ 7 Lt. kosten 5 Rtlr. 8 gl. 9 Pf. was $3\frac{3}{4}$ Zent. 2 ℔ 10 Lt. 2 Qu.?

Antw. 1002 Rtlr. 23 gl. $8\frac{8}{1}\frac{5}{4}\frac{}{2}$ Pf. (vorhin.)

Zweytens: 2 ℔ 7 Lt. kost. $\frac{3}{5}$ Rr., was $3\frac{3}{4}$ Zt. 2 ℔ 10 Lt. 2 Q.?

1) 2 ℔ 7 Lt. : $3\frac{3}{4}$ Zent. = $\frac{3}{5}$ Rlr. : x

71. 4 — 15
284 — 110
1650. 8
13200. 4
52800. Lt.

$\frac{3}{5}$ { $\frac{1}{5}$ = 10560
{ $\frac{2}{5}$ = 21120

284 : 31680 | 111 Rlr.
284 ; : |
328 :
284 :
440
284
156. 6
936. 4
3744. | 13 gl.
284 : |
904
852
52. 6
312. 2
624 | 2 Pf.
568

56 / 284 Pf. macht 111 Rr. 13 gl. $2\frac{5}{2}\frac{6}{8}\frac{}{4}$ Pf.

2) 2 ℔ 7 ℔t. : 2 ℔ 10 ℔t. 2 Qu. = $\frac{3}{5}$ Rtlr. : x

71. 4 74. 4

284. Qu. : 298. Qu.

$\frac{3}{5}$ { $\frac{1}{5}$ = 59 Rtlr. 14 gl. 4$\frac{4}{5}$ Pf.
$\frac{2}{5}$ = 119 = 4 = 9$\frac{3}{5}$ =

178 Rtlr. 19 gl. 2$\frac{2}{5}$ Pf. 5.

284 : 894 Rtlr. — gl. — Pf.

852 | 3 Rtlr.

42. 6.

252. 2.

504 | 1 gl.

284

220. 6

1320. 2

2640 | 9 Pf.

2556

84

284 macht 3 Rtlr. 1 gl. 9$\frac{8}{2}\frac{4}{8}\frac{}{4}$ Pf.

dividirt durch 5 = 14 gl. 9$\frac{8}{1}\frac{4}{4}\frac{}{2}\frac{}{0}$ Pf.

dazu addirt von Nr. 1) = 111 Rtlr. 13 = 2$\frac{2}{1}\frac{8}{4}\frac{0}{2}\frac{}{0}$ Pf.

giebt die Summe der
zweyten Berechnung zu = 112 Rtlr. 3 gl. 11$\frac{3}{1}\frac{6}{4}\frac{4}{2}\frac{}{0}$ Pf.
Dazu die Summe der
ersten zu = = = 1002 Rtlr. 23 gl. 8$\frac{8}{1}\frac{5}{4}\frac{0}{2}\frac{}{0}$ Pf.

welches addirt das ganze
Gesuchte giebt, zu = = 1115 Rtlr. 3 gl. 7$\frac{6}{7}\frac{0}{1}\frac{7}{0}$ Pf.

1. Bey der letztern Berechnung haben wir den Satz 178 Rthlr. 19 gl. 2$\frac{2}{5}$ Pf. mit 5 multiplicirt, um, weil hernach mit 284 in denselben dividirt werden sollte, den Bruch, der aus 5teln bestand, wegzuschaffen, wobey zugleich sich hier alle Pfennige und Groschen mit aufhuben. Daß wir die 5 gebrauchten, geschahe mit Absicht, um die 5tel wegzuschaffen; daß aber die Pfennige

und

und Groschen dadurch zugleich wegfielen, war glücklicher Zufall. Es ward aber daher hernach das Gefundene 3 Rthlr 1 gl. $9\frac{8}{2}\frac{4}{8}\frac{4}{4}$ Pf. mit 5 wiederum dividirt, um das Wahre zu erhalten.

2. Bey diesem Exempel mußte eine vierfache Berechnung vorgenommen werden.

XXIII. Es ist nicht unmöglich, daß auch das erste Glied eine solche ungleiche Zerlegung hat, als wir jetzt von dem zweyten und dritten Gliede gehabt haben. Das Exempel könnte so heißen:

$2\frac{2}{3}$ ℔. 7 ℔t. kosten $5\frac{3}{5}$ Rthlr. 8 gl. 9 Pf., was kosten $3\frac{3}{4}$ Zentn. 2 ℔. 10 ℔t. 2 Qu.?

Es ist leicht einzusehen, daß man hier nicht auf die vorige Art verfahren kann. Vielmehr muß hier das erste Glied ganz in einen Bruch verwandelt werden. Nach diesem Bruche werden nun die beyden andern Glieder behandelt, und dann wird, wie vorhin, die Berechnung viermahl vorgenommen werden müssen.

Das erste Glied ist $2\frac{2}{3}$ ℔ 7 ℔t.
macht 2 ℔ 7 ℔t. + $\frac{2}{3}$ ℔
d. i. 81 ℔t. $1\frac{1}{3}$ Qu.
d. i. $325\frac{1}{3}$ Qu.
d. i. $\frac{976}{3}$ Qu.

Wir betrachten nun das Exempel so, als hieße das erste Glied 976. Was also in dem andern Gliede von Gewichte enthalten ist, wird zu Quentchen resolvirt und darauf mit 3 multiplicirt, worauf auf eben die Art, als vorhin, die eigentliche Berechnung vorgenommen wird.

Uebrigens wird es sich leicht einsehen lassen, daß dieses Glied 976 noch mit einer andern Zahl werde multiplicirt werden müssen, wenn es das zweyte Glied erheischt. Z. B. in diesem Exempel, wo in dem andern Gliede Viertelzentner enthalten sind, muß 976 noch mit 4 multiplicirt werden.

Zusammengesetzte Regel de Tri.

XXIV. Wenn ein Fall entsteht, wobey das Gesuchte durch mehr, als drey Glieder, bestimmt wird, (Cap. 10. III. 8.), so hat man die Regel de Tri mehrere mahle anzuwenden. Uebrigens verfährt man nach denselben Regeln, wie bisher geschehen ist. Diese Art von Exempeln zu berechnen, nennen die Anweisungen zur Rechenkunst gewöhnlich das Rechnen nach der Regel de Quinque, wenn 5 Glieder gegeben sind; und nach der Regel de Septem, wenn 7 Glieder gegeben sind. Man kann aber noch mehrere Glieder erhalten. Es kommt indessen nur auf eine richtige Anordnung der Glieder, und auf eine gleichfalls richtige Anwendung der Regel de Tri an. Beyspiele werden die beste Erläuterung geben.

1. 8 Zentner kosten Fuhrlohn auf 12 Meilen 6 Rtlr., was 32 Zentner auf 24 Meilen?

Hier will man einzig und allein wissen, was 32 Zentn. an Fracht kosten; allein dieses wird bestimmt, erstlich, durch das, was 8 Zentner bey 12 Meilen kosten, und zweytens durch 24 Meilen, wenn für diese in gleichem geometrischen Verhältnisse, als bey den 12 Meilen, bezahlt wird. Nun lassen sich die gegebenen 5 Glieder in einem Augenblicke so ordnen, daß die Regel de Tri zweymahl angewendet werden kann, und das letzteremahl die Antwort ertheilt, nämlich:

8 Zentn. : 32 Zentn. = 6 Rtlr. : x

d. i. 1. 4. 4

24 Rtlr.

so kosten 32 Zentner 24 Rtlr., wenn 8 Zentner 6 Rtlr. kosten und beyde gleich weit gefahren werden. Nun wurden die 8 Zentner für 6 Rtlr. 12 Meilen gefahren, folglich kosten 32 Zentner bey 12 Meilen 24 Rtlr. Um nun zu wissen, wie viel sie bey 24 Meilen kosten, saget:

12 Meil.

12 Meil. : 24 Meil. = 24 Rtlr. : x Rtlr.
1 = 2 = 2

48 Rtlr. das Gesuchte.

2. Eben so richtig konnten wir rechnen:

12 Meil. : 24 Meil. = 6 Rtlr. : x.
1 = 2 = 2

12 Rtlr.

Und, 8 Zentn. : 32 Zentn. = 12 Rtlr. : x.
1 = 4 = 4

48 Rtlr. das Gesuchte.

Bey dieser Berechnung nahmen wir erstlich, an: irgend ein Frachtgut kostet auf 12 Meilen 6 Rtlr., was auf 24 Meilen? Antwort: 12 Rtlr. Zweytens: kosten 8 Zentner 12 Rtlr. zu fahren, was 32 Zentner? Antwort: 48 Rtlr., wie vorhin. Es wird nämlich schlechterdings vorausgesetzt, daß die Kosten der Fracht nach Maasgabe der Zentner, und eben so nach Maasgabe der Meilen gleichförmig steige.

XXV. Wir sehen, daß nicht allein beyde Proportionen mit einander in Verbindung stehen, und daß das Gesuchte erst durch beyde bestimmt wird, und daraus also eine zusammengesetzte Proportion entstehet, sondern daß auch das vierte Glied der ersten Proportion mit dem dritten Gliede der zweyten einerley ist. Wir erinnern uns hierbey an Cap. 9. XXII. und, ohne also die Proportionen besonders zu berechnen, können wir sie nach der gelehrten Ordnung über einander setzen, die sämmtlichen ersten Glieder mit einander multipliciren, eben so die sämmtlichen zweyten mit dem dritten multipliciren, und dies Product durch das Product der ersten dividiren, so giebt der Quotient das Gesuchte. Als:

8 Zentn. : 32 Zentn. = 6 Rtlr. : x.
22 Mil. : 24 Meil. = x : y.

96 : 768 = 6

6

96. 4608 | 48 Rtlr.
384
768
768
0

1. Da indessen dieses gegen die vorhin angewandte Verkürzung weitläufiger werden würde, so können wir die schon (Cap. 9. XXI. 9.) gelehrten Abkürzungen hier auch anbringen. 12 zu 24, wie 1 zu 2; daher setzet statt 12, 1 und statt 24, 2. Ferner 8 zu 32 wie 1 zu 4; daher statt 8 setzet 1, und statt 32, 4, so ist das erste Glied 1, das zweyte 2 × 4 ist 8, mit dem dritten Gliede multiplicirt gleich 48, oder:

1 8 Zentn. : 4ßz Zentn. = 6 Rtlr. : x Rtlr.
1xz Meil. : 2z4 Meil. = x Rtlr. : y Rtlr.

1 8 = 6

6

48 Rtlr.

2. Das, was heraus kommt, als hier 48, kann in solch einer Rechnung, falls die Proportionen nach unsern Grundsätzen recht geordnet sind, keinen andern Namen erhalten, als den das letzte Glied der letzten Proportion, hier y, hatte, welches hier Rthlr. waren.

3. In dem ersten Gliede kam in das Product 1, denn 1 × 1 ist 1; folglich ward hier nicht dividirt.

4. 250 Rthlr. Capital geben in 3 Jahren 37 Rthlr. 12 ggl. Zinsen, was 5400 Rthlr. Capital in 19 Jahren?

25 ø Rlr. Cap. : 540 ø Rlr. Cap. = 37½ Rlr. Zinſ. : x Rlr. Z.
3 Jahr : 19 Jahr = x Rlr. Zinſ. : y Rlr. Z.

75 :··540 6)
:3240 6) } 540 ✕ 37
19440 + 1)
19980
:··· 20250 ½) + 270 = 540/2
:: 182250 9)
:··364500 2) } 19.
384750 1)
75 : 375 : : | 5130 Rtlr. das Geſuchte.
97 : : |
225 :
225 :
00

5. Eben das erhielten wir durch die Berechnung der einzelnen Proportionen.

25 ø Rlr. : 540 ø Rlr. = 37½ Rlr. : x Rlr.
50 75 9)
675 6)
40500 |
50 : 400 : : | 810 Rlr.
50 :
00

3 Jahr ; 19 Jahr = 810 Rlr. : x Rlr.
7290 9)
14580 2)
15390 | 1)
3 : 3 : : | 5130 Rlr. das Geſuchte.
9 : |
0

6. Bey der letztern Art wird, wegen der Vermeidung größerer Zahlen, eher gewonnen, als bey der erſtern.

7. Was geben 1650 Rthlr. in 4 Jahren Zinsen zu 4 Procent?

Wenn man sagt: ein Capital giebt Zinsen zu 4 Procent, so heißt das: 100 Rthlr. geben in einem Jahre 4 Rthlr. Zinsen.

100 Rlr. : 165 Rlr. = 4 Rlr. Zins. : x Rlr. Zins.

4
660 | 66 Rthlr.
10 :

1 Jahr : 4 Jahr = 66 Rthlr. : x Rthlr.

4
264 Rlr. das Gesuchte.

Oder:

100 Rlr. : 165 Rlr. = 4 Rlr. : x Rlr.
1 Jahr : 4 Jahr = x Rlr. : y Rlr.

10 | 165 | 4)
660 | 4)
2640 | 264 Rlr. das Gesuchte.
10 :

8. 2600 Rlr. Cap. geben in 3 Jahren 312 Rthlr. zu 4 Procent, was geben 5200 Rthlr. in 4 Jahren zu 5 Procent?

Eine dreyfache Proportion:

1. 2600 Rlr. : 2. 5200 Rlr. = 312 Rlr. : x Rlr.
3 Jahr : 4 Jahr = x Rlr. : y Rlr.
4 Proc. : 5 Proc. = y Rlr. : z Rlr.

3 | 312 | 2)
624 | 5)
3. 3120 | 1040 Rlr. Interesse.

Eben

Eben so:

1) 26ßß : 52ßß = 312 : x
15600 | 50)
16224 | 2)
26 : | 624 Rthlr.

2) 3 Jahr : 4 Jahr = 624 Rlr. : x Rlr.
2496 | 4)
3 : | 832 Rthlr.

3) 4 Proc. : 5 Proc. = 832 Rlr. : x Rlr.
1 208 5)
1040 Rlr. wie vorhin.

Oder bey 1) saget: 26ßß : 52ßß = 312 : x
d. i. 1 : 2 = 312 : x
2
624 Rlr. u. s. w.

XXVI. Weil hier sieben Umstände angegeben wurden, welche das Gesuchte bestimmten, und also sieben Glieder vorhanden waren, aus welchen das achte gesucht ward, so nennen die Rechenbücher dieses Rechnen: das Rechnen nach der Regel de Septem, ob gleich keine besondere Regel hier Leitung giebt.

Zu diesen Fällen kann man denjenigen rechnen, wenn man gewisse verschiedene Antheile zu berechnen hat, welche im Gewinn, oder Verlust, bestehen, aber keinesweges, der Billigkeit gemäß, als gleich angenommen werden können, sondern in Beziehung auf das Verhältniß gewisser anderer in Zahlen bestehender Werthe bestimmt werden müssen. Man nennt eine solche Berechnung die Gesellschafts-Rechnung.

1. Folgende Beyspiele geben Erläuterung:

Wenn die Personen A. B. und C. ungleiche Geldsummen zu einem zu machenden Profite zusammengeschossen haben, als:

A. hat

A. hat beygetragen 80 Rthlr.
B. = = = = 55 =
C. = = = = 18 =

so haben alle drey zusammengebracht 153 Rthlr.

Wäre ihr Geschäfte beendigt, so würde, dafern dabey gewonnen worden wäre, ein jeder zuförderst seinen Einsatz herausnehmen, und der Profit in dem Verhältniß jener Posten unter sich getheilt werden müssen.

Bey dem Handel kamen wieder heraus:
386 Rlr. 6 gl. 9 Pf.
so ziehe den Einsatz ab mit 153 = — = — =

Profit 233 Rlr. 6 gl. 9 Pf.

Folglich:

153 Rlr.:80 Rlr. (A). = 233 Rlr. 6 gl. 9 Pf.

18640 Rlr.

6 gl. | $\frac{1}{4}$ = = = 20 =
9 Pf. { $\frac{1}{12}$ = = = 1 = 16 gl.
{ $\frac{1}{2}$ = = = — = 20 =

153: 18662 Rlr. 12 gl. | 121 Rlr.
153::
336:
306:
302
153
149 6)
894 4)
153 : 3588 | $23\frac{69}{153}$ gl.
306:
528
459
69

Und

Und

153 Rlr. : 55 Rlr. (B) = 233 Rlr. 6 gl. 9 Pf.

11650 ⋈ 50 + 5)

12815 Rlr.

6 gl. | $\frac{1}{4}$ = = 13 = 18 gl.

9 Pf. $\left\{\begin{matrix}\frac{1}{12} \\ \frac{1}{2}\end{matrix}\right.$ $\begin{matrix}= & = & 1 & = & 3 & = & 6 \text{ Pf.} \\ = & = & — & = & 13 & = & 9 =\end{matrix}$

153 : 12830 Rlr. 11 gl. 3 Pf. | 83 Rlr.

1224

590

459

131. 6)

786. 4)

153 : 3155 | $20\frac{3}{6}\frac{8}{1}\frac{1}{2}$ gl.

306

$\frac{95}{153}$ gl. + $\frac{1}{6}\frac{}{1}\frac{}{2}$ gl. = $\frac{3}{6}\frac{8}{1}\frac{1}{2}$ gl.

Hier ward 3 Pf. als $\frac{1}{4}$ gl. mit 153 dividirt, giebt $\frac{1}{6}\frac{}{1}\frac{}{2}$ gl. und $\frac{9}{1}\frac{5}{5}\frac{}{3}$ gl. mit 4 multiplicirt, giebt $\frac{3}{6}\frac{8}{1}\frac{0}{2}$ gl. dazu $\frac{1}{6}\frac{}{1}\frac{}{2}$ macht $\frac{3}{6}\frac{8}{1}\frac{1}{2}$ gl.

Aus diesem ergäbe sich der Antheil von C:

denn, 121 Rtlr. $23\frac{2}{6}\frac{7}{1}\frac{6}{2}$ gl. = A.

dazu 83 = $20\frac{3}{6}\frac{8}{1}\frac{1}{2}$ = = B.

macht 205 Rtlr. $20\frac{4}{6}\frac{5}{1}\frac{}{2}$ gl. und

233 Rtlr. $6\frac{4}{6}\frac{5}{1}\frac{9}{2}$ gl.

— 205 = $20\frac{4}{6}\frac{5}{1}\frac{}{2}$ =

giebt Rest 27 Rtlr. $10\frac{4}{6}\frac{1}{1}\frac{4}{2}$ gl., als den Antheil von C. und zur Probe

ist der Antheil von A. 121 Rlr. $23\frac{2}{6}\frac{7}{1}\frac{6}{2}$ gl.

= = = B. 83 = $20\frac{3}{6}\frac{8}{1}\frac{1}{2}$ =

= = = C. 27 = $10\frac{4}{6}\frac{1}{1}\frac{4}{2}$ =

so käme der gemachte Profit

heraus mit 233 Rtlr. $6\frac{4}{6}\frac{5}{1}\frac{9}{2}$ gl. d. i. 9 Pf.

2. Be=

2. Berechneten wir den Antheil des C. auf dieselbe Art, wie A und B, so kam eben das heraus:

153 Rlr.: 18 Rlr. (C) = 233 Rlr. 6 gl. 9 Pf.: x.

2097. 9 x 2 = 18.

4194 Rlr.

6 gl. | $\frac{1}{4}$ = 4 = 12 gl.

9 Pf. { $\frac{1}{12}$ = = — = 9 =
{ $\frac{1}{2}$ = = — = 4 = 6 Pf.

153 : 4199 Rlr. 1 gl. 6 Pf. | 27 Rlr.

306:

1139

1071

68 6)

408 4)

153 : 1633 | 10 gl.

153:

103

153

$\frac{1}{1}\frac{0}{5}\frac{3}{3} + \frac{1}{3}\frac{0}{0}\frac{7}{6}$ gl. = $\frac{2}{3}\frac{0}{0}\frac{7}{6}$ gl. = $\frac{4}{6}\frac{1}{1}\frac{4}{2}$ gl.

weil 6 Pf. = $\frac{1}{2}$ gl. ist, so ist hier wiederum mit 153 in $\frac{1}{2}$ ggl. dividirt, giebt $\frac{1}{3}\frac{0}{0}\frac{7}{6}$ ggl. dazu der Rest $\frac{1}{1}\frac{0}{5}\frac{3}{3}$ ggl., giebt $\frac{2}{3}\frac{0}{0}\frac{7}{6}$ ggl. d. i. $\frac{4}{6}\frac{1}{1}\frac{4}{2}$ ggl. wie vorhin.

3. Man könnte auch sagen: der ganze Einsatz verhält sich zu dem Einsatze von A, wie alles Herausgebrachte zu dem Herausgebrachten von A, so kommt auf einmahl der Einsatz von A, sammt dem Profite heraus.

153 Rlr. : 80 Rlr. (A) = 386 Rlr. 6 gl. 9 Pf. : x.

30880 Rlr.

6 gl. | $\frac{1}{4}$ = = 20 =

9 Pf. { $\frac{1}{12}$ = = 1 = 16 gl.
{ $\frac{1}{2}$ = = — = 20 =

153 : 30992 Rlr. 12 gl. | 201 Rlr.
306 : :

302
153

149. 6)
894. 4)

153 : 3588 | $23\frac{69}{153}$ gl.
306 :

528
459

69

Von 201 Rtlr. $23\frac{69}{153}$ gl. den Abzug mit dem Einsatze à 80 = — — gemacht, giebt den Profit mit 121 Rlr. $23\frac{69}{153}$ gl. wie vorhin.

4. Wenn man den Antheil von A gefunden hat, kann man den von B auch so finden, daß man sagt:

80 Rlr.

80 Rlr. : 55 Rlr. = 121 Rlr. $23\frac{6}{1}\frac{9}{5}\frac{}{3}$ gl. : Antheil von B.

6050 121 ⋈ 50
605 + 121 ⋈ 5
6655 Rlr.

23 gl.	12 gl.	$\frac{1}{2}$ =	27 =	12 gl.	
	6 =	$\frac{1}{2}$ =	13 =	18 =	69. 50)
	3 =	$\frac{1}{2}$ =	6 =	21 =	3450. 5)
	1 =	$\frac{1}{3}$ =	2 =	7 =	345
	1 =	— =	2 =	7 =	3795

6707 = 17 = 153 = $24\frac{1}{1}\frac{2}{5}\frac{3}{3}$ gl.
1 = — = $\frac{1}{1}\frac{2}{5}\frac{3}{3}$ = ...

80 : 6708 = 17 = $\frac{1}{1}\frac{2}{5}\frac{3}{3}$ = | 83 Rlr.
640:

308
240

68. 6)
408. 4)

80 : 1649. | 20 gl.
160: |

49 gl.
80

$\frac{1}{1}\frac{2}{5}\frac{3}{3}$ gl. : 80 giebt $\frac{}{1}\frac{1}{2}\frac{2}{2}\frac{3}{4}\frac{}{0}$ gl., dieses zu $\frac{4}{8}\frac{9}{0}$ gl., als dem Reste addirt, giebt $\frac{3}{6}\frac{8}{1}\frac{1}{2}$ gl., wie vorhin.

Diese Art würde, wenn nicht, wie hier, bey den Theilen ein unvermeidlicher Bruch vorhanden wäre, wegen der kleinern Zahlen eine größere Bequemlichkeit gewähren.

XXVII. Eben so wird ein Verlust berechnet, den mehrere auf eine verhältnißmäßige Art erfahren. Wenn bey einem Concurse der Creditor A. 500 Rlr. B. 360 Rlr. C. 40 Rlr. zu fodern hat; die Masse zur Bezahlung ist aber nur 660 Rlr., so erhält ein jeder

weniger,

weniger, als er zu fodern hat; aber nicht zu gleichen Theilen, sondern im Verhältnisse seiner Foderung zu der Foderung des andern.

A. fodert 500 Rlr.
B. = = 360 =
C. = = 40 =
Summa 900 Rlr.

1) 90ø Rlr. : 50ø Rlr. = 660 Rlr. : x Rtlr.

5
90 : 33000 | 366⅔ Rlr. = A.

2) 90ø Rlr. : 36ø Rlr. = 660 Rlr. : x Rlr.

3960 6 × 6)
90 : 23760 | 264 Rlr. = B.

3) 90ø Rlr. : 4ø Rlr. = 660 Rlr. : x Rlr.

4
90 : 2640 | 29⅓ Rlr. = C.

welches letztere die Probe von der Richtigkeit der ganzen Berechnung giebt, denn C zu A und B muß gleich 660 Rlr. seyn, als:

366⅔ Rlr. A.
264 — = B.
29⅓ = C.
Summa 660 Rlr.

1. Es gab schon A. und B. von 660 Rlr. abgezogen, den Theil von C: denn

366⅔ Rlr. A.
264 — = B. und
630⅔ Rlr.

660 Rlr.
630⅔ =
29⅓ Rlr. der Antheil v. C.

XXVIII. Es kann auch auf eine andere Art, z. B. bey einem, von mehrern Personen vorgenommenen gemeinschaftlichen Einkaufe, die gekaufte Waare

als Gewinn angesehn und auf gleiche Art der Antheil der Waare nach dem Antheil des dafür erlegten Geldes eines jeden berechnet werden.

A. giebt 9 Rlr.
B. = 12 =
C. = 18 =
Summa 39 Rlr.
} dafür kaufen sie 117 ℔ einer gewissen Waare,

so wird der Antheil des A, seinem Gelde gemäß berechnet:

39 Rlr. : 9 Rlr. = 117 ℔ : x ℔

9)

39 : 1053 | 27 ℔ = A.

und, weil 27 kleiner als 117 ist, so läßt sich hier die Rechnung (Nr. 4.) mit Vortheil anbringen.

9 Rlr. (A) : 12 Rlr. (B) = 27 ℔ : x ℔.

162 6 × 2

324

9 : 324 | 36 ℔ = B.

27 ℔ A. 117
36 = B. 63

63 ℔ 54 ℔ = C.

XXIX. Bey den Exempeln der Regel de Tri kann auf eine dreyfache Art gefehlt werden: 1) in dem Calculo; 2) in der Anordnung der Proportion, oder in dem Ansatze; 3) in beyden Stücken. Diejenigen Arten der Proben solcher Exempel, welche man in den meisten arithmetischen Lehrbüchern angegeben findet, beziehen sich gewöhnlich auf die erste Hinsicht, und geben daher keine vollkommene Gewißheit in Ansehung der Richtigkeit des Exempels.

Um erstlich in Ansehung des Calculi seiner Sache gewiß zu seyn, so kann man das gefundene vierte Glied mit dem ersten multipliciren; ingleichen, das zweyte

mit

mit dem dritten. Sind beyde Producte einander gleich, so ist das gefundene vierte Glied die rechte Zahl.

12 ℔ : 36 ℔ = 5 Rlr. : x Rtlr.
1 : 3 — 3
15 Rtlr.

Wird hier das vierte Glied 15 mit 12 multiplicirt so ist das Product gleich 180. Und da 36 × 5 auch 180 ist, so ist 15 die rechte Zahl.

Der Grund liegt in §. XVI. des 9ten Capitels. Wären nämlich die Producte ungleich, so könnte 15 nicht das vierte Glied zu den drey gegebenen erstern seyn.

Auch versichert man sich in Ansehung der Richtigkeit des Calculi, wenn man eine Umkehrung des Exempels vornimmt, da denn das, was man eben erhalten hat, als ein gegebenes Glied angesehn wird, und, dafern richtig gerechnet ist, eines der vorhin gegebenen Glieder wieder herauskommen muß.

Z. B. 4 Pfund kosten 9 Rtlr., was $6\frac{1}{2}$ Pfund?

4 : $6\frac{1}{2}$ = 9 Rtlr. : x Rtlr.
13
9
8 : 117 | $14\frac{5}{8}$ Rtlr. das Gesuchte.

Kehret nun das Exempel auf die Art um:

Wenn man für $14\frac{5}{8}$ Rtlr. erhält $6\frac{1}{2}$ Pfund, was bekömmt man für 9 Rtlr.?

$14\frac{5}{8}$ Rlr. : 9 Rtlr. = $6\frac{1}{2}$ ℔ : x ℔.

117. 72. 6.
2. } 12+72
432
864
234: 936 | 4 ℔. das Gesuchte.
936 |

Hier kamen 4 Pfund heraus, und mußten heraus-kommen, wenn richtig calculirt seyn sollte.

Oder: 9 Rtlr. geben 4 Pfund, was $14\frac{5}{8}$ Rtlr.?

9 Rtlr. : $14\frac{5}{8}$ Rtlr. = 4 ℔ : x ℔

117 | 4)
72: 468 | $6\frac{1}{2}$ ℔
432 |
36 Rtlr.
72

Hier mußten $6\frac{1}{2}$ ℔ als eines der vorhin gegebenen Glieder herauskommen.

Oder: $6\frac{1}{2}$ ℔ kosten $14\frac{5}{8}$ Rtlr., was 4 ℔?

d. i. $6\frac{1}{2}$ ℔ : 4 ℔ = $14\frac{5}{8}$ Rtlr. : x.

13 8 = 117. 4
104 4. 468 | 52
52 468 | 9 Rlr.
0

Alle diese Proben sind aber kein Beweis, daß das Exempel richtig sey. Ist nämlich der Ansatz falsch, so ist es möglich, daß, ohngeachtet der Bestätigung durch diese Proben, das Gefundene doch nicht das wahre Gesuchte ist.

1. Wenn man sagt: Was geben 12 Rtlr., wenn 6 Rtlr. 4 ℔ geben? Und man machte den Ansatz fehlerhaft nach der Frage:

12 Rtlr. : 6 Rtlr. = 4 ℔ : x ℔.

4
12: 24 | 2 ℔,

so würde diese Rechnung absurd seyn. Gleichwohl hielte sie die vorigen Proben aus, welche man gewöhnlich ohne Einschränkung für untrüglich ausgiebt. Denn das erste

Glied

Glied 12 Rtlr., multiplicirt mit dem Gefundenen vierten 2 ℔, ist 24 Rtlr. und, das zweyte Glied 6 Rtlr. mit dem dritten 4 ℔ multiplicirt, giebt auch 24 ℔.

2. Ingleichen die andere Art der Probe durch Umkehrung:

Was kosten 4 Pfund, wenn 2 Pfund kosten 12 Rtlr.?

4 ℔ : 2 ℔ = 12 Rtlr. :

4. 24.

$\frac{24}{0}$ | 6 Rtlr.

so kommt das vorhin gegebene zweyte Glied wirklich heraus und das Exempel ist doch falsch.

XXX. Es bleibt also zur Untersuchung der Richtigkeit dieser Exempel nichts übrig, als, daß man, erstlich, den Ansatz nach allen bishero ertheilten Regeln wohl untersuche, welches nun ungemein leicht fallen muß, und sicherer, als jede nützliche Art von Proben seyn wird; und dann, zweytens, den Calculus selbst, entweder durch sorgfältige Nachrechnung, oder durch die beyden vorhin bemerkten Proben, nochmahls erforsche, da denn ein Fehler in demselben sich leicht entdecken lassen wird, indem es wider die Wahrscheinlichkeit ist, daß man dabey einen solchen entgegengesetzten Fehler begehen sollte, durch welchen auch nach diesen Proben ein unrichtiger Calculus als richtig sollte erklärt werden.

Wollte man bey wichtigen Fällen, um seiner Sache noch gewisser zu gehn, ein mehreres thun, so könnte man ein solches Regel de Tri-Exempel noch vermittelst einer Berechnung nach der Kettenrechnung prüfen. Denn da die Art des Ansatzes in derselben von dieser ziemlich abweichend ist, so ist es fast unmöglich, daß ein aus beyden Berechnungsarten hervorgehendes völlig übereinstimmendes Resultat in irgend einer Hinsicht

sollte fehlerhaft seyn können; deswegen lassen wir auch das weg, was in manchen Anweisungen zur Rechenkunst von der sogenannten Probezahl mühsam und ohne allen wissenschaftlichen Grund gesagt wird.

Das eilfte Capitel.

Die Ketten-Rechnung.

I. Bey manchen Rechnungsfällen aus der sogenannten zusammengesetzten Regel de Tri (10. Cap. XXV.) bemerken wir, daß das vierte Glied der ersten Proportion dem dritten der zweyten, das vierte der zweyten dem dritten der dritten, das vierte der dritten dem dritten der vierten, und so auf ähnliche Art weiter, sowohl in Ansehung der Zahl, als des Namens, gleich sey.

Es findet also zwischen diesen Gliedern eine gewisse besondere Verbindung statt, welche wir, da stets die vierten Glieder auf die bemerkte Art durch sich selbst in die folgende Proportion eingreifen und daselbst das dritte Glied vorstellen, gleichsam als kettenartig ansehen können. Hieraus entsteht eine Art zu rechnen, welche man an die Stelle jener Rechnungsweise setzen kann, und welche aus demselben Grunde den Namen der Kettenrechnung führt.

1. Wie viel Rthlr. Preußisch kostet 1 Himpten, Weizen, wenn 2 Himpten auf 1 Scheffel, 24 Scheffel auf 1 Wispel gehn, und 2 Wispel 100 Rthlr. kosten?

Man siehet bald ein, daß diese Rechnungsfrage durch mehrere Proportionen beantwortet wird, und können daher die Antwort durch die Regel de Tri, wenn wir sie einzeln anwenden, auf die gewöhnliche Art erfahren.

1) 2 Wispl. : 1 Wispl. = 100 Rtlr. : x Rtlr.
macht 50 Rtlr.

2) 24 Schffl. : 1 Schffl. = x Rtlr. : y Rtlr.
macht $2\frac{1}{12}$ Rtlr.

3) 2 Himpt. : 1 Himpt. = y Rtlr. : z Rtlr.
macht $1\frac{1}{24}$ Rtlr.

Das wäre also gesetzt:

2 Wispl. : 1 Wispl. = 100 Rtlr. : 50 Rtlr.
24 Schffl. : 1 Schffl. = 50 Rtlr. : $2\frac{1}{12}$ Rtlr.
2 Himpt. : 1 Himpt. = $2\frac{1}{12}$ Rlr. : $1\frac{1}{24}$ Rtlr.

II. Hier fand eine solche kettenartige Verbindung statt: denn ist nicht das vierte Glied in der ersten Proportion 50 Rthlr. gleich dem dritten in der zweyten 50 Rthlr.? Eben so ist das vierte in der zweyten $2\frac{1}{12}$ Rtlr. gleich dem dritten in der dritten $2\frac{1}{12}$ Rtlr.

Nun haben wir solche Exempel bereits auch auf die Art berechnen gelernt, daß wir nicht bey einer jeden Proportion das Facit besonders suchten, sondern wir setzten die Proportionen genau über einander. Hierauf, erstlich, multiplicirten wir die sämmtlichen zweyten Glieder aller Proportionen und das allein gegebene erste Glied der dritten Proportion mit einander. Zweytens: wir multiplicirten die ersten Glieder sämmtlich mit einander, und drittens: mit diesem Product dividirten wir in das erstere Product, so gab der Quotient das gesuchte vierte Glied der letztern Proportion, als:

2 Wispl. : 1 Wispl. = 100 Rtlr. : x Rtlr.
24 Schffl. : 1 Schffl. = x Rtlr. : y Rtlr.
2 Himpt. : 1 Himpt. = y Rtlr. : z Rtlr.

24 × 2 × 2 : 1 × 1 × 1 × 100. :
‖ ‖
96 96 : 100 | $1\frac{1}{24}$ Rtlr. das Gesuchte.
96|
4
96

1. Wenn man bey solchen zusammengesetzten Proportionen nach der einfachen Regel de Tri einzeln rechnet, so hat man die Weitläuftigkeit, daß man jedes vierte Glied der ersten Proportion mit einem Bruche erhält, wodurch in die folgenden Berechnungen Brüche kommen, die oft zu einem großen Nenner anwachsen, zumal wenn die Glieder an sich außerdem Brüche bey sich führen. Große Nenner sind aber stets in Rechnungen unangenehm.

2. Bey der eben bemerkten Art wird diesem schon besser abgeholfen. Z. B.

250 Rtlr. Capital geben in einem Jahre $8\frac{3}{4}$ Rtlr. Interessen, was $739\frac{4}{5}$ Rtlr. Capital in $5\frac{1}{2}$ Jahre?

d.i. 250 Rlr. : $739\frac{4}{5}$ Rtlr. = $8\frac{3}{4}$ Rtlr. Intr. : x Rtlr. Intr.
macht $25\frac{4}{5}\frac{4}{0}\frac{6}{0}\frac{5}{0}$ Rtlr.
ferner 1 Jahr : $5\frac{1}{2}$ Jahr = $25\frac{4}{5}\frac{4}{0}\frac{6}{0}\frac{5}{0}$ Rlr. Int. : x Rlr. Int.
macht $142\frac{4}{2}\frac{1}{0}\frac{1}{0}\frac{5}{0}\frac{}{0}$ Rtlr. Intr.

Setzen wir nun nach der zuletzt gelehrten Art die Proportionen in Eins an, und rechnen:

250 Rtlr. : $739\frac{4}{5}$ Rtlr. = $8\frac{3}{4}$ Rtlr. Intr. : x Rtlr. Intr.
1 Jahr : $5\frac{1}{2}$ Jahr = x Rtlr. Intr. : y Rtlr. Intr.

250. 5) 3699. 11)
1250. 4) 40689. 35)
5000. 2) 1424115. | $142\frac{4}{1}\frac{1}{0}\frac{1}{0}\frac{5}{0}\frac{}{0}$ Rtlr. Intr.
10000.

so

so erhalten wir das Gesuchte ohne Bruchrechnung, indem wir, weil 739 durch 5 zu Fünfteln gemacht, diese mit 2 halbirt waren, und durch 4 nochmahls zu Viertel gemacht wurden, das erste Glied mit 5, 4, und 2 multiplicirten, und so die Brüche wegschafften.

III. Ein solches Verfahren, als dieses ist, wird indessen noch nicht die Kettenrechnung genannt. Das Verfahren, welches mit diesem Namen belegt wird, ist überhaupt folgendes: Man bringt alle gegebenen Glieder in zwey Reihen, oder Columnen (d. i. gleichsam Säulchen, weil die Glieder über einander stehn), wobey diejenigen Stücke, welche in den Proportionen (II. 1.) die zweyten und das erste dritte Glied ausmachten, in eine Reihe über einander zu stehen kommen, und die Stücke, welche die ersten Glieder ausmachten, gleichfalls in eine besondere Reihe übereinander gesetzt werden. Man multiplicirt in jeder Reihe (oder Columne) die Posten mit einander und zuletzt wird mit dem Producte aus derjenigen, in welcher die ersten Glieder stehen, in das Product aus der andern Columne dividirt. Der Quotient ist dann das Gesuchte.

IV. Bey dieser letztern Art zu rechnen, oder bey der eigentlichen Kettenrechnung, erwächst gegen die letztere Art der Vortheil, daß man, erstlich, nicht so viel zu schreiben, zweytens, nur zwey Columnen zu übersehen hat, und daß drittens, die Kettenverbindung vor Fehlern, die bey dem Ansatze der Proportionen entstehen können, mehr sichert, viertens, die Geschwindigkeit im Ansatze befördert wird, und also besonders demjenigen, der sich zum geschwinden und mechanischen Rechnen gewöhnt hat, sehr zu statten kommt. Das erste, worauf indessen alles hierbey ankommt, ist der richtige Ansatz, von welchem wir daher jetzt umständlich handeln wollen.

Von dem Ansatze bey der Ketten-Rechnung.

V. Der Ansatz zu den Exempeln der Kettenrechnung wird in den Anweisungen der Rechenkunst auf eine mechanische Art gelehrt; allein doch auf eine solche, wobey man eine große Fertigkeit erhält, einen solchen Ansatz mit Richtigkeit geschwind zu Stande zu bringen. Gründe des Verfahrens werden dabey nicht angezeigt. Wir wollen daher anjetzt zuförderst den Ansatz nach der gewöhnlichen mechanischen Art vortragen; alsdann die Gründe desselben, so viel als möglich ist, deutlich zu machen suchen, und darauf noch zeigen, wie man den Ansatz noch auf andre Arten machen könne, damit die Anfänger, indem sie mehr als eine Art dieses Ansatzes kennen lernen, diese Rechnung desto richtiger einsehen und fassen mögen.

Die gewöhnliche Vorschrift zum Ansatze einer Kettenrechnung ist die: 1) Formiret zwey Columnen, oder Reihen. 2) In die zur Linken setzet oben den bloßen Namen derjenigen Größe, von welcher ihr die Zahl, welche der Name bezeichnen soll, suchet. 3) Dann setzet ihr zur Rechten die Fragezahl. 4) Diejenige Zahl, deren Größe mit dieser einerley Namen führt, setzet unter den hingeschriebenen bloßen Namen der ersten Größe zur Linken; 5) dieser zur Rechten setzet diejenige Größe, welche bey der Angabe zum Exempel mit ihr verglichen, oder sonst mit ihr verbunden ist. 6) Setzet wiederum zur Linken die Größe, die mit dieser letztern einerley Namen führt. Ist noch ein Glied vorhanden, das mit der letztern Größe verglichen, oder sonst verbunden ist, so kommt das wieder zur Rechten neben ihr zu stehen, u. s. w. 7) Das Exempel muß sich allemahl mit einer Größe zur rechten Hand schließen, welche mit der ersten oben zur Linken einerley Namen hat.

1. Der Umstand, daß das Glied Nr. 4. mit Nr. 3. und Nr. 6. mit Nr. 5. und hernach Nr. 8. (wenn es vorhanden ist) mit Nr. 7. einerley Namen führt, macht gleichsam die kettenartige Verbindung, von welcher die Rechnung den Namen erhalten hat.

2. Dies wäre vom Ansatze zu merken. Ein paar Exempel mögen das Gesagte erläutern.

Wie viel Rthlr. Preuß. kostet 1 Himpten Weizen, wenn 2 Himpten auf 1 Scheffel, und 24 Scheffel auf 1 Wispel gehn, und 2 Wispel 100 Rthlr. Preußisch kosten?

Hier ist: Rthlr. Preuß. dasjenige Glied, welches nach Nr. 2. dem bloßen Namen nach, da ist, ohne Zahl, als welche man eben wissen will, und die also das Gesuchte wird. Es kommt also — Rthlr. Preuß. oben in der Columne linker Hand zu stehn. Die Fragezahl ist ein Himpten Weizen, welche also (nach Nr. 3.) der ersten zur Rechten gegenüber kommt.

Die Zahl 2 Himpten, führt mit der letztern einerley Namen, sie kommt also unter die erstere (nach Nr. 4.). Weil nun in der Angabe die 2 Himpten mit 1 Scheffel verglichen, oder sonst verbunden wurden, so kommt der 1 Scheffel den 2 Himpten gegenüber, auf die rechte Seite (nach Nr. 5.). Nun führen 24 Scheffel mit 1 Scheffel einerley Namen, daher kommen sie unter die 2 Himpten (nach Nr. 6.). Die 24 Scheffel werden in der Angabe mit 1 Wispel verglichen, deswegen kommt 1 Wispel gegen den 24 Scheffeln gegenüber zur Rechten (nach Nr. 6.). Nun führen 2 Wispel mit 1 Wispel einerley Namen; daher kommen 2 Wispel hinunter in die linke Columne, und diesen gegenüber das letzte vorhandene Glied, welches auch mit den 2 Wispeln verglichen wird: nämlich 100 Rthlr. Preuß. Es schließt sich auch daher das Exempel rechter Hand mit einem Gliede, welches mit dem ersten linker Hand einerley Namen führt; welches bey diesen Exempeln statt haben muß.

Darnach würden wir den Ansatz so machen:

Wieviel — Rtlr. Preuß. = kostet = 1 Himpt. Weizen?
wenn 2 Himpten = auf 1 Scheffel,
und 24 Scheffel = auf 1 Wispel
gehn und 2 Wispel = = 100 Rthlr. Preuß.
kosten.

Oder mit Hinweglassung jener, nicht zur Berechnung weiter dienenden Worte:

— Rtlr. Preuß.	1 Himpt. Weizen
2 Himpten	1 Scheffel
24 Scheffel	1 Wispel
2 Wispel	100 Rtlr. Preuß.

3. Man sieht, wie in solchen Exempeln aus den gleichen Namen die Kettenverbindung entsteht, welche zugleich zu dem Ansatze eine treue Anweisung ertheilt:

denn — Rtlr. Pr. / 1 Himpten
2 Himpten / 1 Scheffel
24 Scheffel / 1 Wispel
2 Wispel / 100 Rtlr., welches gleichsam eine Kette abgiebt.

VI. Ist der Ansatz gemacht, so werden die Glieder einer jeden Columne mit einander multiplicirt, und in das Product der rechten Columne wird mit dem Producte der linken dividirt. Der Quotient ist das Gesuchte, (welches wir hier nur vorläufig sagen wollen). So hier

$$24 \times 2 \times 2 = 96$$
$$\frac{1}{2}00 \times 1 \times 1 \times 1 = 100$$
$$96$$
$$\overline{4}$$
$$96$$

$1\frac{1}{24}$ Rtlr.

Erläu-

Erläuterung dieses Verfahrens.

VII. Wenn wir das vorige Exempel nach der zusammengesetzten Regel de Tri berechnen, so steht es so:

2 Wispel : 1 Wispel = 100 Rlr. : x Rlr.
24 Scheffel : 1 Scheffel = x Rlr. : y Rlr.
2 Himpt. : 1 Himpt. = y Rlr. : z Rlr.

$$24 \times 2 \times 2 \mid : 100 \times 1 \times 1 \times 1 \mid$$
$$96. \quad 100 \mid 1\tfrac{1}{24}\text{ Rlr.}$$

Um diese hier gegebenen wirklichen Glieder in zwey Columnen dergestalt zu bringen, daß das, was unter sich multiplicirt werden muß, in eine und eben dieselbe Columne zusammen komme, ist es nöthig, daß die Glieder von einerley Namen, als 2 Wispel, 1 Wispel nicht über einander, oder in einerley Columne zu stehn kommen: denn wir sehen aus der letztern Vorstellung, daß 2 Wispel und 1 Wispel in der Ordnung nach der Regel de Tri nicht zusammen kommt, weil die 2 Wispel dividiren, und 1 Wispel multiplicirt. Eben so 24 Scheffel und 1 Scheffel dürfen nicht in eine Columne kommen, weil hier 24 Scheffel dividiren und 1 Scheffel multiplicirt. So auch mit den Himpten. Aus diesem Grunde wechselt man bey dem Ansatze mit den Gliedern, nach der Kettenart, dergestalt ab, daß stets das folgende Glied in eine andere Columne kommt. Auf diese Art wird 2 Wispel von den 100 Rthlrn. dergestalt getrennt, daß beyde nicht in eine Columne kommen können.

Weil nun bey diesen Exempeln die zweyten und ersten Glieder sämmtlich, und von den dritten Gliedern nur das aus der ersten Proportion gegeben sind, so würde stets eine ungleiche Zahl von Gliedern (hier z. B. 7.) vorhanden seyn. Da aber für das gesuchte Glied ein leerer Raum gelassen wird, so entsteht dadurch

durch gleichsam ein neues, und folglich frets eine gerade Zahl von Gliedern (hier 8.), und es muß dahero jedesmahl der Ansatz sich mit zwey Gliedern schließen.

Da wir auch mit dem Namen des Gesuchten, und also gerade in der umgekehrten Ordnung, als in dem Ansatze in der Regel de Tri, anfangen, so muß sich der Ansatz mit dem Namen des Gesuchten endigen. Sonst ist er unter diesen Umständen verworren. Wenn wir auch das vorige Exempel, wie es nach der zusammengesetzten Regel de Tri anzusetzen ist, nachsehn, so finden wir, daß der Kettenansatz gerade der umgekehrte ist. Denn z als das letzte Glied ist das Gesuchte. Dann folgt rückwärts 1 Himpte, dann 2 Himpte, 1 Scheffel, 24 Scheffel 1 Wispel, 2 Wispel und zuletzt 100 Rtlr. Preuß.

Demohngeachtet ergiebt sich aus beyden Rechnungen einerley: denn es werden in beyden Fällen einerley Glieder mit einander multiplicirt, und einerley Product wird auch durch einerley dividirt.

1. Wie viel Hamburger Ellen betragen 150 Nürnberger Ellen, wenn 7 Nürnberger Ellen 8 Breslauer; 6 Breslauer 5 Brabanter, und 4 Brabanter 8 Hamburger Ellen machen?

Die gesuchte Größe sind hier Hamburg. Ellen. Die Fragezahl ist 150 Nürnberg. Ellen. Mit den 7 Nürnb. Ellen werden 8 Breslauer verglichen, (denn es heißt: 7 Nürnb. Ellen machen 8 Breslauer); mit 6 Breslauer 5 Brabanter; mit 4 Brabanter, 8 Hamburger Ellen.

Demnach müssen wir also so sagen:

— Hamb. Ellen	150 Nürnb. Ellen
7 Nürnb. =	8 Bresl. =
6 Bresl. =	5 Brab. =
4 Brab. =	8 Hamb. =

7 × 6 × 4 = 168.

150 × 8 × 8 × 5 = 48000 | 168 = 285 $\frac{120}{168}$ Hamb. Ellen.

2. Wenn nun auch gleich in der Angabe des Exempels das erste und zweyte Stück des Ansatzes nicht vorn stehen, oder genannt werden, so können sie doch bald gefunden werden. Z. B. wenn es geheißen hätte:

7 Nürnberger betragen 8 Breslauer; 6 Breslauer 5 Brabant.; 4 Brabant. 8 Hamburger Ellen: wie viel Hamburger Ellen werden 150 Nürnberger machen? So sehe ich leicht ein, daß: Wie viel Hamburger Ellen? Die gesuchte Größe sey, die im Ansatze zuerst stehen müsse, ferner daß 150 Nürnberger Ellen als die Fragezahl dazu gehöre und ihr zur Rechten zu stehen komme, und nun giebt die Kettenverbindung die weitere Ordnung an: als in der

zweyten Reihe : 7 Nürnb. — 8 Breslauer in
der dritten = : 6 Bresl. — 5 Brabanter in
der vierten = : 4 Brab. — 8 Hamburger Ellen.

3. Wären auch die Glieder ganz zusammen geworfen, so würde dennoch vermittelst der gegebenen Anweisung der Ansatz ohne Schwierigkeit gemacht werden können: Z. B.

5 Ducaten machen 3 Carlsd'or; 3 Rtlr. machen einen Ducaten; und 3 Gulden betragen 2 Rtlr. Wie viel Carlsd'or werden 100 Gulden machen?

Ansaz

— Carlsd'or	=	100 Gulden
3 Gulden	=	2 Rthlr.
3 Rthlr.	=	1 Ducaten.
5 Ducaten	=	3 Carlsd'or.

45. 45 : 600 | 13 1/3 Carlsd'or.

Die Carlsd'or, als das Gesuchte, kommen in die erste Stelle; 100 Gulden, die Fragezahl, rechts. Nun lehrt die Kettenverbindung, daß 3 Gulden linker Hand folgen müssen, und da 3 Gulden mit 2 Rthlr. verglichen werden, so kommen 2 Rtlr. dagegen zu stehen. Zu 2 Rtlr. gehören, zufolge der Kettenverbindung, 3 Rtlr., damit wird ein Ducaten verglichen. Dazu gehören, nach der Kettenverbindung 5 Ducaten, damit werden 3 Carlsd'or verglichen, die das Exempel schließen, welches sich auch mit Carlsd'or anfieng.

VIII. Es giebt Rechnungsfälle, wo man in der Angabe nicht so viel Glieder ausgedrückt (das heißt, ausdrücklich mit Zahl und Namen angegeben und benannt) mit bekömmt, als man bedarf, ob sie gleich im Grunde mit vorhanden sind. Sie müssen aber, wenn man den Ansatz nach der Kettenrechnung machen will, noch in denselben ausdrücklich eingetragen werden, und die Kettenverbindung weiset uns gleich an, wie es geschehen muß. Exempel werden hier die beste Erläuterung geben. Wenn Jemand in einer Stunde 6 Pf. zu verzehren hat, Tag und Nacht in Anschlag gebracht, wie viel wird er in 8 Jahren verzehren? Hier sind die gegebenen Glieder: 1 Stunde, 6 Pf. 8 Jahr, welche aber in keinen Kettenansatz, so wie sie hier stehen, gebracht werden können, eben so wenig als man sie so in einen Aufsatz der Regel de Tri

1 Stunde : 8 Jahr = 6 Pf. : x Pf.

bringen

bringen kann. Man sieht nämlich, daß 1 Stunde und 8 Jahr noch Zwischenglieder enthalten, und so wie, wenn dieses Exempel nach der Regel de Tri hätte berechnet werden sollen, die 8 Jahr durch die Multiplication mit 365 zu Tagen, und hernach durch 24 zu Stunden hätten resolvirt werden müssen (das heißt, Jahre und Stunden müßten zu einem Bruche von gleicher Benennung gemacht werden), so müssen hier diese beyden Zahlen in den Kettenansatz gebracht werden, als:

— Pf.	=	8 Jahr.
1 Jahr	=	365 Tage
1 Tag	=	24 Stunden
1 Stunde	=	6 Pf.

1 × 1 × 1 = 1

365 (24
2190
8760 (8
70080 (6
420480 Pf.

Da 1 nicht dividirt, so sind die hier erhaltenen 420480 Pf. das Gesuchte, = 1460 Rthlr.

IX. Da wir jetzt die 420480 Pf. zu Rthlr. reduciren wollten, mußten wir sie erst mit 12 und den erhaltenen Quotienten mit 24 dividiren. Bringen wir nun diese beyden Zahlen dergestalt in den Kettenansatz, daß sie in die dividirende Columne kommen, so erhalten wir das Gesuchte gleich in Thalern. Als:

— Rthlr.	=	8 Jahr
1 Jahr	=	365 Tage
1 Tag	=	24 Stunden
1 Stunde	=	6 Pf.
12 Pf.	=	1 ggl.
24 ggl.	=	1 Rthlr.

288 = 420480 | 288 / 1460 Rthlr.

1. Hier brachten wir die fehlenden Zwischensätze durch Hülfe der Kettenverbindung leicht an. Die 6 Pf. führten auf 12 Pf.; die 12 Pf. wurden mit 1 ggl. verglichen; 1 ggl. führte auf 24 ggl.; die 24 ggl. wurden mit 1 Rthlr. verglichen.

2. Wollte man ein solches Exempel nach der Regel de Tri zu berechnen, sich die Mühe geben, so würde der Ansatz so stehen:

1 Stunde	:	24 Stunden	=	6 Pf.	: x Pf.
1 Tag	:	365 Tage	=	x Pf.	: y Pf.
1 Jahr	:	8 Jahr	=	y Pf.	: z Pf.
12 Pf.	:	z Pf.	=	1 ggl.	: x ggl.
24 ggl.	:	x ggl.	=	1 Rtlr.	: y Rtlr.

3. Hier kamen 24 und 12 in die dividirende Columne, wie vorhin; 365, 24, 8, 6, in die andere, wie vorhin. Dahero muß in jedem Falle einerley erfolgen.

4. Daß hier in der vierten Proportion das zweyte Glied mit dem vierten in der dritten, und das zweyte in der fünften mit dem vierten in der dritten gleich sind, ändert in der Rechnung nichts: denn es ist gleichviel, ob hier diese Größen unter den zweyten, oder dritten Gliedern stehn (Cap. 9. XXIII.).

5. **Ein ähnliches Exempel:** Wenn 10 Zentner Waare kosten 500 Rthlr., was kostet ein Quentchen dieser Waare?

Saget:	— Rtlr.	kostet	1 Quent.	
wenn	4 Quent.	=	1 Lt.	
	32 Lt.	=	1 ℔	
	110 ℔	=	1 Zntn.	
	10 Zntn.	=	500 Rtlr.	

32 × 110 × 4 × 10 : 500 = $1\frac{5}{4}\frac{0}{0}\frac{0}{8}$ Rtlr. das Gesuchte.

Weil 110 × 32 × 4 × 10 = 140800 ist und 500 durch dieses Product dividirt einen Bruch = $\frac{5}{1}\frac{0}{4}\frac{0}{0}\frac{0}{8}\frac{0}{0}$ giebt, oder

oder aufgehoben = $\frac{5}{1408}$ ist, so dürften wir nur $\frac{5}{1408}$ Rtlr. in die gangbare kleinere Münze verwandeln = $1\frac{1}{44}$ Pf.

6. Indessen können wir uns des letztern besondern besondern Verfahrens noch überheben, wenn wir die Rechnung gleich auf Pfennige anstellen, indem es sich bey der Angabe leicht vorher sehen läßt, daß ein Quentchen keinen ganzen Thaler kosten werde. Wir können daher den Ansatz gleich so machen, daß wir fragen: wie viel Pfennige wird 1 Quentchen kosten, wenn ꝛc. also:

— Pf.	=	1 Qu.
4 Qu.	=	1 Lt.
32 Lt.	=	1 ℔
110 ℔	=	1 Zntn.
10 Zntn.	=	500 Rtlr.
1 Rtlr.	=	24 ggl.
1 ggl.	=	12 Pf.

110 × 32 × 4 × 10 = 1408 ßß. 500 × 24 × 12 = 1440 ßß

1440 | 1 Pf.
1408

$\frac{32}{1408}$ Pf. = $\frac{1}{44}$ Pf. wie vorhin.

7. Wenn 1 Orthof Wein 60 Rthlr. in Golde (Gold bezeichnen wir hier kurz ※) kostet, was kostet eine Bouteille solchen Weins in Preußischen Courant, wenn man auf 1 Anker, deren 6 auf einen Orthof gehn, 40 Bouteillen rechnet, und 5 Rthlr. in Golde so viel, als 5 Rthlr. 18 ggl. Preuß. Courant, werth sind?

Saget:			
— Rtlr. Preuß. Cour.	=	1 Bouteille	
40 Bouteill.	=	1 Anker	
6 Anker	=	1 Orthof	
1 Orthof	=	60 Rtlr. ※	
5 Rtlr ※	=	5 Rlr. 18 gl. Pr. Cour.	

Merket: 1) der Ansatz konnte hier nicht anders nach obigen Regeln gemacht werden.

2) Die 5 Rthlr ℵ und 60 Rthlr. ℵ gehörten zufolge der Kettenverbindung an diese Plätze, daher man auf die ganze Beschaffenheit der Glieder wohl Acht haben muß. Denn bloße Thaler bestimmten hier nicht allein, sondern es gab hier Thaler Preuß. Courant, und Thaler Gold oder ℵ als verschiedene Dinge.

3) Man muß hier den Preis von 1 Bouteille in einem Bruche von Rthlr. Preuß. Courant erhalten.

4) Da es sich aber absehen läßt, daß 1 Bouteille in diesem Falle nur einige ggl. kosten werde, so kann man auch gleich hierauf im Ansatze selbst Rücksicht nehmen, als:

— ggl. Preuß. Cour.	=	1 Bouteille
40 Bouteillen	=	1 Anker
6 Anker	=	1 Orthof
1 Orthof	=	60 Rtlr. ℵ
5 Rtlr. ℵ	=	5 Rtlr. 18 gl. Preuß. Cour.
1 Rtlr. Pr. Cour.	=	24 gl. dito.

Hier erhalten wir den Preis in ggl. Preuß. Courant. Den etwanigen dabey befindlichen Bruch könnten wir auf Pfennige reduciren.

Wollten wir das nicht, so könnten wir auch die Pf. mit in den Ansatz bringen, und so erfahren, was eine Bouteille in Pf. Preuß. Courant kosten würde, als:

— Pf. Preuß. Cour.	=	1 Bouteille
40 Bouteillen	=	1 Anker
6 Anker	=	1 Orthof
1 Orthof	=	60 Rtlr. ℵ
5 Rtlr. ℵ	=	5 Rtlr. 18 ggl. Pr. Courant
1 Rtlr. Pr. Cour.	=	24 ggl. dito.
1 ggl. dito.	=	12 Pf. dito.

Wir haben dieses Exempel nicht berechnet, weil darinnen der Bruch 5 Rtlr. 18 ggl. d. i. $5\frac{3}{4}$ Rtlr., oder $5\frac{1}{2}\frac{8}{4}$ Rtlr., oder der Unreine $\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{8}{4}$ Rtlr., vorkommt,

von

von welchem und ähnlichen Fällen wir in der Folge reden werden, indem wir jetzt uns blos eigentlich mit dem Ansatze beschäftigen.

X. Es giebt Fälle, wo die Glieder zusammengesetzt sind. Zusammengesetzte Glieder sind solche, wo zugleich mehr, als ein Umstand, die Bestimmung ertheilt. Z. B. die Bestimmung der Zinsen eines Capitals von 280 Rthlr. in 12 Jahren. Diese Zinsen werden nicht allein durch das Capital der 250 Rthlr., sondern auch durch 12 Jahre bestimmt. Solche zusammenwürkende Dinge setzt man bey dem Ansatze als ein Glied an, und kann sie auch vermittelst eines Zeichens mit einander verbinden. Z. B. Wenn 100 Rthlr. Capital in einem Jahre 5 Rthlr. Zinsen geben, was geben 250 Rthlr. Capital in 12 Jahren Zinsen?

Wieviel — Rthlr. Zinsen geben { 250 Rthlr. Capital in 12 Jahren }

wenn { 100 Rthlr. Capital in 1 Jahre } geben = = 5 Rthlr. Zinsen.

Hier sind zwey zusammengesetzte Glieder, welche dasjenige in sich enthalten, was zusammengenommen das andere bestimmte: denn 250 Rthlr. Capital sollten nicht blos eine Zinse, d. i. eine einjährige, sondern eine Zinse von 12 Jahren geben, dahero mußte beydes zusammengesetzt werden. Eben so: 100 Rthlr. geben die Zinse der 5 Rthlr. in einem Jahre, und 100 Rthlr. Capital und 1 Jahr gehörten also zusammen. Uebrigens fand sich die Kettenverbindung vermittelst der gleichen Namen Rthlr. Capital, und wieder Rthlr. Capital, so wie auch Jahr und wieder Jahr. Der Schluß enthält, wie bisher immer, denselben Namen, den das erste Glied hatte, nämlich Zinsen.

1. Wenn 20 Personen in einem Jahre 112 Himpten Rocken verzehren, wie viel verzehren 16 Personen in 5 Jahren?

Hier bestimmen 1 Jahr und 20 Personen die Aufzehrung der 112 Himpten Rocken: denn 1 Jahr allein bestimmte sie noch nicht, weil die Frage übrig blieb: Wie viel Personen verrichten diese Consumtion in 1 Jahre? Eben so bestimmten 20 Personen die 112 Himpten Rocken noch nicht: denn es blieb die Frage übrig: in wie langer Zeit wird von den 20 Personen diese Consumtion verrichtet? Folglich sind 1 Jahr und 20 Personen ein zusammengesetztes Glied, in welchem beyde Stücke zusammen die 112 Himpten bestimmen. Ferner 16 Personen und 5 Jahre sind wieder ein zusammengesetztes Glied, denn man will wissen, wieviel 16 Personen verzehren, und zwar in 5 Jahren. Folglich wird durch 16 Personen und 5 Jahr das Gesuchte mit bestimmt. Dahero müssen wir ansetzen:

— Himpten = { 16 Personen in 5 Jahren }

{ 20 Personen in 1 Jahre } = 112 Himpten.

Die Kettenverbindung lehrt hier, daß 20 Personen und 1 Jahr auf 16 Personen und 5 Jahr folgen mußten.

2. Wenn auf 15 Meilen 32 Rthlr. Fracht für 25 Zentner gegeben wird, wieviel Meilen Fracht wird man mit 16 Rthlr. auf 18 Zentner bestreiten können?

Die 25 Zentner kosten 32 Rthlr. und zwar auf 15 Meilen, folglich bestimmen 25 Zentner und 15 Meilen die 32 Rthlr. Ferner: die 18 Zentner und die gesuchte Zahl der Meilen werden durch die 16 Rthlr. bestimmt,

und

und also machen die gesuchten Meilen und die 18 Zentner ein zusammengesetztes Glied aus. Daher saget:

{— Meilen / 18 Zentner} = 16 Rthlr.

32 Rthlr. = = {15 Meilen / 25 Zentner}

1) Die Rthlr. geben hier die Kettenverbindung ab.

2) In dem gegenwärtigen Falle war das gesuchte Glied, als das unbekannte ein zusammengesetztes mit einem gegebenen, den 18 Zentnern. Es werden uns nun solche Fälle nicht irre machen können.

XI. Es können drey Glieder ein einziges zusammengesetztes Glied ausmachen. Z. B. Wenn 24 Arbeiter in 5 Wochen 36 Rthlr. kosten, dafern sie des Tages 9 Stunden arbeiten; was kosten 30 Arbeiter in 6 Wochen, wenn sie den Tag 15 Stunden arbeiten?

Offenbar bestimmen 24 Arbeiter, 5 Wochen und 9 Stunden, zusammengenommen, die 36 Rthlr.

Denn ich gebe die 36 Rthlr. nicht blos aus der Ursach, weil 24 Mann arbeiten, sondern auch weil sie 5 Wochen und jeden Tag 9 Stunden arbeiten.

Ferner: 30 Arbeiter, 6 Wochen und 15 Stunden gehören eben aus dieser Ursach zusammen.

Derowegen können wir nicht anders als so ansetzen:

— Rthlr. = {30 Arbeiter / in / 6 Wochen / und / 15 Stunden}

{24 Arbeiter / in / 5 Wochen / und / 9 Stunden} = 36 Rthlr.

1. Es kann auch das gesuchte Glied, als das Unbekannte, mit zwey gegebenen ein zusammengesetztes Glied ausmachen. Wenn z. B. es geheißen hätte: Wie viel Wochen arbeiten 24 Arbeiter den Tag zu 9 Stunden für 36 Rthlr., wenn 30 Arbeiter 6 Wochen, den Tag zu 15 Stunden für 90 Rthlr. arbeiten?

$$\left\{\begin{array}{l}\text{— Wochen}\\ \text{9 Stunden}\\ \text{24 Arbeiter}\end{array}\right\} = \text{36 Rthlr.}$$

$$\text{90 Rthlr.} = \left\{\begin{array}{l}\text{6 Wochen}\\ \text{15 Stunden}\\ \text{30 Arbeiter}\end{array}\right\}$$

XII. So wie in den bisherigen Exempeln dieser Art zwey einfache Glieder mit vorhanden waren, als in dem letztern Rthlr. und Rthlr., so können auch mehrere solcher einfacher Glieder vorhanden seyn. Z. B.

25 Zentner kosten Fracht auf 15 Meilen 30 Rthlr. in Golde, was kostet 1 Zentner 1 Meile in ggl. Preuß. Courant, wenn 5 Rthlr. ✕ 5 Rthlr. 16 ggl. Preuß. Courant betragen.

$$\text{— ggl. Pr. Cour.} = \left\{\begin{array}{l}\text{1 Zentner}\\ \text{1 Meile}\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{25 Zentner}\\ \text{15 Meilen}\end{array}\right\} = \text{30 Rthlr. ✕}$$

$$\text{5 Rthlr. ✕} = \text{5 Rthlr. 16 ggl. Pr. Cour.}$$

$$\text{1 Rtlr. Pr. Cour.} = \text{24 ggl. Pr. Cour.}$$

1. Nach dem bishero von diesen Fällen des Kettenansatzes bey zusammengesetzten Gliedern Gesagten wird man sich wundern müssen, wie neuere Rechenbücher behaupten können, diese Fälle gehörten nicht zur Kettenrechnung. Man hat sich nur durch die gehäuft angebrachten Fragezahlen, und deswegen formirten vielen Regeln selbst irre geführt. Fragezahlen giebt es bey jedem

Ketten-

Kettenansatze stets mehr, als eine, welches man sieht, wenn man eine solche Aufgabe durch die einfache Regel de Tri auflöset. Man muß nur die letzte Fragezahl, welche sich unmittelbar auf das Gesuchte bezieht, nicht mit den übrigen verwechseln, die bey dem Kettenansatze übersehen werden.

2. Man wird nach alle dem bishero Gesagten nun, nicht allein den Grund der gelehrten Art des Kettenansatzes, indem derselbe aus den simpelsten und deutlichsten Grundlehren der Rechenkunst hergeleitet ist, einsehen, sondern auch eben dadurch in den Stand gesetzt seyn, in allen möglichen Fällen den Ansatz geschwind und völlig sicher verrichten zu können.

Wenn wir das bishero hierüber Gesagte sorgfältig prüfen werden, so werden wir in dieser Materie ohnstreitig nie irre gemacht werden können, welches doch kaum zu vermeiden steht, wenn man manchen practischen Anweisungen folgt, in welchen ohne Distinction die verschiedenen Fälle unter einander geworfen sind.

XIII. Wenn wir das Exempel (XII.) nach der zusammengesetzten Regel de Tri aufsetzen, so steht es so:

25 Zntn. : 1 Zntn. = 30 Rlr. ✕ : x Rlr. ✕
15 Meil. : 1 Meil. = x Rlr. ✕ : y Rlr. ✕
5 Rlr. ✕ : y Rlr. ✕ = $5\frac{2}{3}$ Rlr. Pr. Cour. : z Rlr. Cour.
1 Rlr. Cr. : z Rlr. Cr. = 24 ggl. Pr. Cour. : zz ggl. Cour.

Hier werden 25 Zentner und 15 Meilen eben so das erste Glied der ersten und zweyten Proportion, wie sie vorhin ein Glied in der linken Columne ausmachten. Ferner: 1 Zentner und 1 Meile sind hier das zweyte Glied der ersten und zweyten Proportion, so wie sie vorhin als ein zusammengesetztes Glied in die rechte Columne kamen.

XIV. Ein Exempel der einfachen Regel de Tri kann man auch in einen Kettenansatz bringen, wiewohl es völlig unnöthig wäre, daraus ein Exempel der Kettenrechnung zu machen. Wenn 3 Pfund 6 Rthlr. kosten, was kosten 8 Pfund? müßte man, dem vorhergehenden zufolge, sagen:

— Rthlr. = 8 ℔.
3 ℔ = 6 Rthlr.

Unnöthig würde ein solcher Kettenansatz seyn, weil er auch nicht den mindesten Vortheil gegen die Regel de Tri-Berechnung gewährt, indem der Vortheil der Kettenrechnung nur bey den Exempeln möglich ist, die eine mehrmahlige Anwendung der Regel de Tri erfodern würden, in welchen Fällen Exempel der Kettenrechnung aus mehreren Gelenken (daß wir so sagen) entstehn, da hier nur ein Gelenke vorhanden ist. Diese Fälle berechnet man lieber vermittelst der Regel de Tri.

XV. Wir müssen noch bey dem Ansatze der Kettenrechnung der Brüche erwehnen, in Hinsicht auf diesen Ansatz. Der Bruch, der sich bey einem Gliede befindet, bleibt auch bey dem Kettenansatze bey einem solchen Gliede stehen. Z. B. in dem Exempel (IX. 7.) hatten wir 5 Rtlr. 18 ggl. Nun ist 18 ggl. $= \frac{3}{4}$ Rtlr. Dahero können wir dafür $5\frac{3}{4}$ Rtlr. sagen.

Wenn nun ein Glied eine solche kleinere Sorte benannt bey sich führt, welche allemahl ein Bruch von der größern ist (5. Cap. I. 8.), als hier 18 ggl., so können wir sie in einen Bruch ihres eigenthümlichen Renners verwandeln. Z. B. 18 ggl. sind $= \frac{1}{2}\frac{8}{4}$ Rtlr. Daher können wir ansetzen $5\frac{1}{2}\frac{8}{4}$ Rtlr. Weil indessen ein Bruch von einem kleinern Renner dem von einem größern vorzuziehn ist, so sagt man lieber $5\frac{3}{4}$ Rtlr., als $5\frac{1}{2}\frac{8}{4}$ Rtlr. Zuweilen kann man keinen kleinern Renner erhalten. Als 5 Rtlr. 19 ggl. sind $5\frac{1}{2}\frac{9}{4}$ Rtlr.

1. Wie viel Wochen arbeiten 24 Arbeiter, den Tag zu $9\frac{1}{2}$ Stunde, für $36\frac{1}{3}$ Rtlr., wenn 30 Arbeiter 6 Wochen und 4 Tage, den Tag zu 15 Stunden für 90 Rtlr. arbeiten?

Der Ansatz mußte so seyn:

$$\left\{\begin{array}{c}\text{— Wochen}\\ \text{24 Arbeit.}\\ 9\frac{1}{2}\text{ Stunde}\end{array}\right\} = 36\frac{1}{3}\text{ Rtlr.}$$

$$90\text{ Rtlr.} = \left\{\begin{array}{c}6\frac{4}{6}\text{ Wochen}\\ \text{30 Arbeit.}\\ \text{15 Stunden}\end{array}\right\}$$

Hier ward, zufolge des Obigen, die halbe Stunde zu den 9 Stunden gesetzt, wozu sie gehörte; eben so $\frac{1}{3}$ Rtlr. zu den 36 Rtlr. Allein wenn es heißt: wenn 30 Arbeiter 6 Wochen und 4 Tage, den Tag zu 15 Stunden arbeiten; so dürfen die 4 Tage mit 1 Tag und 15 Stunden nicht verwechselt werden, sondern 4 Tage sind $\frac{4}{6}$ einer Woche (wir rechnen nämlich eine Arbeitswoche zu 6 Tagen). Daher mußte $\frac{4}{6}$ Woche mit 6 Wochen, wozu sie gehören, verbunden werden.

2. Macht ein bloßer Bruch ein Glied in der Angabe aus, so wird es auch bloß hingestellt. Z. B. 2 Pfund kosten $\frac{1}{4}$ Rtlr., was 18 Pfund?

— Rtlr. = 18 ℔.
2 ℔ = $\frac{1}{4}$ Rtlr.

Hat man eine kleinere Sorte in einem Exempel, worin eine größere der Art vorkommt, so macht man die kleinere zu einem Bruche der größern, als:

Wie viel Wochen arbeiten 24 Arbeiter, den Tag zu 9 Stunden für 36 Rtlr.; wenn 30 Arbeiter 5 Tage, den Tag zu 15 Stunden für 12 Rtlr. arbeiten?

— Wo-

— Wochen 24 Arbeit. 9 Stunden	=	36 Rtlr.	
12 Rtlr.	=	$\frac{5}{6}$ Wochen 30 Arbeit. 15 Stunden	

Es sind 5 Tage gleich $\frac{5}{6}$ Wochen. Daher verwandelten wir die kleinere Sorte der 5 Tage in einen Bruch einer Woche, gleich $\frac{5}{6}$ Wochen, weil die Arbeitswoche 6 Tage hat.

1. Wir können indessen auch in einem Falle, wie der gegenwärtige, die 5 Tage hinsetzen, nur müssen wir, vermittelst der Kettenverbindung, die Tage mit den Wochen durch das Verhältniß von 6 zu 1, als 6 Tage, die 1 Arbeitswoche gleich sind, verbinden.

Dann stünde der Ansatz so:

— Wochen 24 Arbeit. 9 Stunden	=	36 Rtlr.	
12 Rtlr.	=	5 Tage 30 Arbeit. 15 Stunden	
6 Tage	=	1 Woche	

2. Wollten wir, weil in der Angabe Tage sind, das Gesuchte in Tagen suchen, so würden wir ansetzen:

— Tage 24 Arbeit. 9 Stunden	=	36 Rtlr.	
12 Rtlr.	=	5 Tage 30 Arbeit. 15 Stunden	

so

so wäre in dem Ansatze kein Bruch; dafür aber erhielten wir das Gesuchte in einem unächten Bruche von einer Woche, den wir durch Division mit dem Nenner 6 auflösen müßten, um Wochen und Tage zu erhalten.

XV. Man kann auch gleich die höhere und niedere Sorte zu einem unächten Bruche machen. Z. B.

10 Pfund kosten 4 Rthlr. 6 ggl., was 8 Pfund?

— Rtlr. = 8 ℔
10 ℔ = $1\frac{0}{2}\frac{2}{4}$ Rlr.

so erhalten wir das Gesuchte in Thalern (jedoch unter der Voraussetzung, daß mit dem Nenner 24 recht verfahren werde, wie hernach gelehrt werden wird), oder wollen wir den unreinen Bruch nicht haben, so setzen wir an:

— Rlr. = 8 ℔
10 ℔ = 102 ggl.
24 ggl = 1 Rtlr.

Hätten wir gehabt: 10 Pfund kosten 4 Rlr. 6 ggl. 3 Pf., was 8 Pfund? so müßten wir ansetzen:

— Rtlr. = 8 ℔
10 ℔ = $102\frac{1}{4}$ ggl.
24 ggl. = 1 Rlr.

denn 4 Rlr. = 96 ggl. und 6 ggl. = 102 ggl.
und 3 Pf. = $\frac{1}{4}$ ggl.

Etwas veränderte Form des Kettenansatzes.

XVI. Wenn man erwägt, daß die Hauptsache bey dem Kettenansatze darinnen besteht, daß nur das, was bey dem Ansatze nach der Regel de Tri in das erste Glied kommen muß, hier zusammen in eine Columne gesetzt

gesetzt werde, alles übrige Gegebene aber gleichfalls in eine Columne zusammen kommen müsse, so wird man es begreifen, daß es mehrere Arten des Kettenansatzes noch müsse geben können. Es läßt sich zwar gegen die bishero befolgte Art, den Ansatz zu machen, nichts einwenden; die Kettenverbindung ist sehr geschickt, einen geschwinden Ansatz zu befördern. Die mechanische Regel, daß man das Gesuchte mit seinem bloßen Namen in die erste Stelle, und die Fragezahl gegenüber bringe, ist auch ohnstreitig eine sehr zu statten kommende Wegweiserin für solche, die das Mechanische lieben. Demohngeachtet wird es vergönnt seyn, hier einige an sich kleine Neuerungen zu berühren, die, wenn sie gleich keinen besondern Vortheil an sich gewähren, doch schon dadurch nützlich werden, daß sie einen Rechner zum weitern Nachdenken über diesen Gegenstand bringen, ihm auch einen andern Weg, sich zu helfen, eröffnen, damit derselbe, theils dadurch die Richtigkeit seiner Arbeit erforschen, theils auch sich selbst möge leiten können, wenn etwa einmahl jenes Mechanische dem Gedächtnisse nicht gleich zu Dienste stehen wollte.

XVII. Es scheinen uns vors erste jene Ausdrücke, deren sich die practischen Rechenbücher, und zwar die besten unter ihnen bedienen (V.), um bezeichnen zu wollen, was im Ansatze der Glieder, dem zur Linken stets für ein Glied in der rechten Columne entgegengesetzt werden müsse, noch von der Art zu seyn, daß ein nicht genug Geübter (und für die schreibt man doch in diesen Anweisungen) sich wohl nicht stets daraus möchte unterrichten können. Statt des Ausdrucks: das mit ihm verknüpfte Glied ꝛc. oder was damit verglichen wird, sage ich lieber: das, was am Werthe, oder Gültigkeit, ihm gleich ist. Ich nehme zu diesem Behufe an: Wenn 1 Pfund Kaffe 10 ggl. kostet, so ist 1 Pfund Kaffe gleich 10 ggl. (nämlich am

Werthe,

Werthe, wovon hier blos die Rede ist). Oder, wenn 1 Ducaten den Werth von 3 Rthlr. hat, sage ich: 1 Ducaten ist gleich 3 Rthlr.; ja! wenn 10 Mann 3 Wochen arbeiten, und ihr gesammtes Taglohn kostet in dieser ganzen Zeit 60 Rthlr., so nehme ich 10 Mann und 3 Wochen gleich 60 Rthlr. an. Ich finde es der Deutlichkeit wegen nun für bequemer, zuförderst für den Ansatz der Kettenrechnung, in Ansehung der neben einander stehenden Glieder die Regel zu geben: **was einander gleich ist** (in dem vorhin bemerkten Sinne des Wortes in Ansehung der Gültigkeit), stellet neben einander, oder gegen einander über, und bedient euch, der bessern Versinnlichung wegen, dazu des Zeichens der Gleichheit, =. Das übrige zeigt die Kettenverbindung, und in die erste Stelle mag, wie bisher immer geschehen ist, das Gesuchte seinem bloßen Namen nach gesetzt werden.

1. Also, wenn wir den Fall hätten: Wie viel ggl. Preuß. Courant wird 1 Bouteille Wein kosten, wenn 1 Orthof 60 Rtlr. ✕, den Louisd'or, oder 5 Rlr. ✕ zu 5 Rtlr. 18 ggl. gerechnet, kostet, und 40 Maaß 1 Anker, 6 Anker einen Orthof enthalten?

— ggl. Preuß. Cour. = 1 Bouteille Wein
40 Bouteillen Wein = 1 Anker
6 Anker = 1 Orthof
1 Orthof = 60 Rtlr. ✕
5 Rtlr. ✕ = $5\frac{3}{4}$ Rtlr. Preuß. Cour.
1 Rtlr. Preuß. Cour. = 24 ggl. Preuß. Cour.

Es ist die Zahl der ggl. Preuß. Courant, die ich wissen will, als das erste Glied in der linken Columne, am Werthe gleich 1 Bouteille Wein. Denn der Werth der 1 Bouteille Wein soll ja, in ggl. ausgedrückt, gesucht werden. Darum gehört eine Bouteille Wein den — ggl. Preuß. Cour. gegen über, und dazwischen das

Zeichen

Zeichen =. Könnte ich nun auch die Fragezahl nicht finden (welcher Ausdruck vielleicht von manchen zuweilen mit dem Gesuchten verwechselt werden könnte), so dürfte ich nur in diesem Falle untersuchen: Was dasjenige sey, von dem ich den Preis wissen will, oder, was hier am Werthe den gesuchten ggl. Preuß. Courant gleich seyn solle? so ergiebt sich hieraus, daß eine Bouteille es ist, die ihnen gleich seyn soll, welche also gleich dem Gesuchten gegenüber gesetzt werden muß. Ferner: 40 Bouteillen Wein finden in der ganzen Angabe nichts gleiches (dem Werthe, das ist hier, dem Maaße nach), als 1 Anker; 6 Anker haben auf gleiche Art nichts gleiches, als 1 Orthof; 1 Orthof ist gleich (dem Preise nach) 60 Rtlr. ℛ; 5 Rtlr. ℛ sind (dem Werthe nach) gleich $5\frac{3}{4}$ Rtlr. Pr. Courant; 1 Rtlr. Pr. Courant ist auf gleiche Art, 24 ggl. Pr. Cour. gleich.

2. Diese Bemerkung, daß die ihrem Werthe, oder Gültigkeit, nach gleichen Sachen stets neben einander zu setzen sind, wird in allen Fällen eine Regel ohne alle Ausnahme zur Zusammenstellung dererjenigen Glieder an die Hand geben, welche neben einander stehen müssen, und da im Augenblicke helfen, wo die Regel: daß man die Dinge, die man mit einander vergleichet ꝛc. neben einander stellen müsse, einen in Ungewißheit lassen kann.

3. Bey den zusammengesetzten Gliedern (X.) findet eben diese Regel statt.

Wenn ich ansetze:

{ — Tage
{ 24 Arbeit.
{ 9 Stunden } = 36 Rtlr.

12 Rtlr. = { 5 Tage
{ 30 Arbeit.
{ 15 Stunden },

so

so ist der Lohn der 12 Rtlr. gleich dem Werthe der Arbeit der 30 Arbeiter in 5 Tagen, den Tag zu 15 Stunden. Folglich mußten diese drey Stücke als Eins angesehen, und vermittelst des Zeichens der Gleichheit, = den 12 Rthlrn. als gleich, entgegen oder daneben gesetzt werden. Eben so ist die Arbeit der 24 Arbeiter in der Zahl der Tage zu 9 Stunden, die wir suchen, dem Lohne von 36 Rtlr. gleich, und dahero sind vermittelst der = diese 3 Stücke den 36 Rthlrn. gegenüber zu setzen.

XVIII. Es ist keinesweges nothwendig, daß wir bey dem Kettenansatze mit dem unbekannten Gliede anfangen und die Fragezahl darauf gleich folgen lassen. Diese Regel ist ohnstreitig nur für solche Köpfe erfunden worden, denen ein so unverkennbares Glied, als das unbekannte und die Fragezahl ist, zur Leitung angegeben werden mußte, indem sie sich sonst in den Gliedern verirret haben würden. Denn das unbekannte Glied ist bey dem Ansatze nach der Regel de Tri gerade das letzte. Wer nicht bloß ein mechanischer Rechner seyn will, der bindet sich nicht hieran.

Wir wollen jenen mit Fleiß gewählten ganz leichten Fall nehmen (I. 1.). Wenn 2 Wispel Weizen 100 Rthlr. Pr. Cour. kosten, was kostet 1 Himpten; wenn 2 Himpten 1 Scheffel ist, und 24 Scheffel 1 Wispel geben?

Erstlich: Fanget, wenn Größen (als hier das Gemäs) erst unter sich (noch nicht mit andern Sachen, als z. B. Korn mit seinem Preise) verglichen werden, mit diesen Größen an, als hier:

2 Himpten = 1 Scheffel
24 Scheffel = 1 Wispel

Zweytens: Auf diese Art kommt nun zu den andern Größen, indem ihr, wie vorhin bemerkt ist, blos Sachen, die an Gültigkeit und Werthe einander gleich sind, neben einander stellet, und sonst der Kettenverbindung folget, als:

1 Wispel = 100 Rtlr. Pr. Cour.
(wie viel Rtlr.?) — Rtlr. = 1 Himpten.

Hier schließt sich das Exempel wieder mit dem Namen, womit es sich anfieng.

Drittens: Das unbekannte Glied kam mit der Fragezahl in die letzte Reihe. Es kamen dieselben Glieder in eine und eben dieselbe Columne, als vorher. Folglich stand das Exempel nun so:

2 Himpten = 1 Scheffel
24 Scheffel = 1 Wispel
1 Wispel = 100 Rtlr.
— Rtlr. = 1 Himpten

1. Jenes andere Exempel (VII. 1.) würde hier so stehen:

7 Nürnb. Ellen = 8 Bresl.
6 Bresl. = 5 Brabant.
4 Brabant. = 8 Hamb.
— Hamb. = 150 Nürnb.

2. Bey Fällen, wo etwa nur 4 Glieder vorhanden sind (XIV.) würde nur eine Umkehrung der Reihen gegen die vorhin gelehrte Art des Ansatzes statt finden. Z. B. 6 Pfund kosten 8 Rtlr., was 4 Pfund?

6 ℔ = 8 Rtlr.
— Rtlr. = 4 ℔

3. Mann kann auch mit der Fragezahl anfangen und alsdann mit dem Gesuchten schließen, als:

= = =

= = = 150 Nürnberger Ellen
7 Nürnberger Ellen = 8 Breslauer =
6 Breslauer = = 5 Brabanter =
4 Brabanter = = 8 Hamburger =
– Hamburger = = = =

Hier geschieht denn der Anfang auf der rechten Seite; die linke bleibt leer. Auf der linken Seite muß sich alsdann der Ansatz schließen; die rechte muß leer bleiben.

4. Da wir bey den Exempeln der Regel de Tri das gesuchte Glied stets x bezeichnet haben, so können wir es auch bey der Kettenrechnung thun, zumahl da das eingeführte Zeichen — eine Zweydeutigkeit veranlassen kann (3. Cap. VI.).

5. Wenn man ansetzte:

150 Nürnberger Ellen = = =
8 Breslauer = = 7 Nürnberger Ellen
5 Brabanter = = 6 Breslauer =
8 Hamburger = = 4 Brabanter =
= = = = x Hamburger =

so würde das Gesuchte auf der rechten Seite zu stehen kommen.

Wirkliche Berechnung des Kettenansatzes.

XIX. Wir haben schon bereits gesagt, daß, wenn der Ansatz in Ordnung gebracht sey, man die Glieder jeder Columne mit einander multiplicire, und mit dem Producte derjenigen Columne, worinnen das Gesuchte befindlich sey, in das Product der andern Columne dividire. Der Quotient sey das Gesuchte. Darnach haben wir auch schon wirkliche Berechnungen gemacht. Dieses mußten wir damahls schon bemerken, um die Theorie des Ansatzes erklären zu können. Jetzt erinnern wir dazu noch folgendes:

1. Jedesmahl wird mit dem Producte der Columne dividirt, worinnen x, oder das Gesuchte, befindlich ist. Diese Columne nennen wir daher die Divisions-Columne, die andere die Multiplications-Columne. Auf diese Art mag Jemand nach einer Manier von denen vorhin bemerkten ansetzen, wie er will; er wird stets wissen, womit und worinn er zu dividiren habe.

2. Ist das Product der dividirenden Columne = 1, so giebt die andere Columne schon, wie sie da ist, das Gesuchte an.

XX. Ist in dem Ansatze ein reiner Bruch vorhanden, so nehmt den Zähler für eine ganze Zahl an, setzet den Nenner in die Columne gegenüber, und behandelt nun beyde Zahlen, wie die ganzen Zahlen der übrigen Glieder.

Der Grund dieses Verfahrens liegt darinn: Wir wollen annehmen, in der Multiplications-Columne stünde z. B. der Bruch $\frac{2}{4}$, so wird derselbe, wenn der Nenner weggenommen wird, 2, oder er wird viermahl größer, als er ist. Werden nun in dieser Columne die Glieder mit einander multiplicirt, so wird das Product um viermahl größer, als es seyn sollte. Dividiren wir daher in dasselbe mit dem Producte aus der Divisions-Columne, so wird auch das Gesuchte um viermahl größer erhalten, als es wirklich ist. Tragen wir aber den Nenner in die Divisions-Columne, so wird diese auch dadurch viermahl größer, als sie seyn sollte. (Cap. 4. XXXVII. 10. Cap. 3. XIII. 3.). Auf diese Art bleibt der Werth von $\frac{2}{4}$ in der Multiplications-Columne durch diese Versetzung der 4 ungeändert, und wir haben den Vortheil, mit ganzen Zahlen zu rechnen.

Z. B. wir hätten $\frac{\text{—}}{3} = \frac{2}{10}$ so würden wir nach

2	= 2
3	= $\frac{2}{4}$

obiger Anweisung rechnen:

$$\begin{array}{rcl} — & = & 2 \\ & & \not{2} \\ 4 \quad 2 & = & \overline{\not{4}} \quad 2 \\ & & \\ 3 & = & 10 \end{array}$$

$$24 \quad = \quad 40 \quad = \quad 1\tfrac{16}{24}$$

1. Indem wir die 4 ausstreichen und in die andre Columne versetzen, so wird nun 2 aus $\frac{2}{4}$. Folglich da vorhin $10 \times \frac{2}{4} = 5$ war, so wird nun $10 \times 2 = 20$, also wird das Product 4mahl größer, als es seyn sollte. Dahingegen wird nun mit dem Zähler 4 die 2×3 multiplicirt, welches 24 giebt. Vorhin war blos 3 und 2 mit einander zu multipliciren, welches 6 gab. Es wird also die Divisions-Columne auch um 4mahl größer, als sie seyn sollte, und dennoch bleibt das Verhältniß beyder Columnen gegen einander. Erst sollte es seyn 6 zu 10; nun wird es 4 : 40. In beyden Fällen giebt das letztere durch das erstere dividirt, zum Quotienten $1\frac{2}{3}$.

XXI. Den vermischten Bruch machet zu einem unächten und setzet seinen Nenner auch auf die andre Seite.

$$— \text{ Rtlr.} = 4\tfrac{1}{2} \text{ ℔}$$
$$3\tfrac{1}{3} \text{ ℔} = 2\tfrac{4}{5} \text{ Rtlr.}$$

das wäre:

$$2. \; — \text{ Rtlr.} = \not{4}\frac{x}{\not{2}} \text{ ℔.} \quad 9.$$

$$5. \; 10. \; \not{3}\frac{x}{\not{3}} \text{ ℔} = \not{2}\frac{\not{4}}{\not{5}} \text{ Rtlr.} \quad 3. \; 14.$$

$$10 \times 5 \times 2 = 100 : 14 \times 9 \times 3 = 378 \;\Big|\; \frac{100}{3\frac{78}{100} \text{ Rtlr.}}$$

1. Hier machten wir $4\frac{1}{2}$ ℔ zu $\frac{9}{2}$; die 2 hinüber. $3\frac{1}{3}$ ℔ ward $\frac{10}{3}$ ℔; die 3 hinüber. $2\frac{4}{5}$ Rtlr. ward $\frac{14}{5}$ Rtlr.; die 5 hinüber. Nun gab $14 \times 9 \times 3$ das Product 378 und $10 \times 5 \times 2$ gab 100, welches, in 378 dividirt, das Gesuchte mit $3\frac{78}{100}$ Rtlr. gab.

2. Indem ein vermischter Bruch zu einem unächten gemacht wird, streicht man ihn durch, weil er nun nicht mehr gilt. Ingleichen:

2. — Rlr. Pr. Cour. = $\frac{\text{ß}}{\text{ß}}$ ℔. 41

3. 403. $\frac{\text{ß}}{\text{ß}}$ ℔. = $\frac{\text{ß}}{\text{ß}}$ Rlr. ℛ 146. 4.

4. 5 Rtlr. ℛ = $\frac{\text{ß}}{\text{ß}}$ Rlr. Pr. Cour. 23.

403 × 5 × 4 × 3 × 2 = 48360 : 146 × 41 × 23 × 4

48360

= 550712 | $11\frac{1}{4}\frac{8}{8}\frac{7}{3}\frac{5}{6}\frac{2}{0}$ Rtlr. Pr. Cour.

XXII. Sind größere und kleinere Sorten bey einander, z. B. Pfund und Loth; Rthlr. ggl. Pf. ꝛc. so machet sie zu unächten Brüchen:

2 Pfund 3 Loth kosten 4 ggl. 9 Pf., was 1 Zentner 6 Pfund; wenn 110 Pfund 1 Zentner machen?

— Rtlr. = $1\frac{6}{110}$ Zntr.
1 Zntr. = 110 ℔.
$2\frac{3}{32}$ ℔. = $4\frac{3}{4}$ ggl.
24 ggl. = 1 Rtlr.

1. Hieße es 2 ℔ 3 Lt. 2 Quent., so würden hier am bequemsten die 2 ℔ in Lt. = 64 Lt. verwandelt, und 2 Quent. als $\frac{1}{2}$ Lt. ausgedrückt werden, also $64\frac{1}{2}$ Lt. Es stünde dann im Ansatze:

110 ℔.
1 ℔ = 32 Lt.
$64\frac{1}{2}$ Lt. = $4\frac{3}{4}$ ggl. u. s. w.

Wenn aber angegeben wäre 96 ℔ 3 Lt. 3 Qu., so würde die Resolution der 96 ℔ zu Lt. zu viel Umstände machen, daher saget lieber $96\frac{1}{1}\frac{5}{2}\frac{}{8}$ ℔. denn 1 Lt. = $\frac{1}{32}$ ℔ und 1 Qu. = $\frac{1}{128}$ ℔, folglich 3 Lt. $\frac{1}{1}\frac{2}{2}\frac{}{8}$ ℔ + 3 Qu. = $\frac{1}{1}\frac{5}{2}\frac{}{8}$ ℔.

Hätten

Hätten wir also den Ansatz: Wenn 96 Pfund 3 Loth 3 Quent. kosten 112 Rtlr. 4 ggl. 3 Pf., was kosten 9 Lt. 1 Quent.? so stünde:

— Rtlr. = $9\frac{1}{4}$ Lt.
32 Lt. = 1 ℔.
$96\frac{1}{128}$ ℔ = $112\frac{17}{96}$ Rtlr.

Denn 3 Pf. = $\frac{3}{288}$ Rtlr. und 4 ggl. = $\frac{48}{288}$ Rtlr.
$+\frac{3}{288}$ Rtlr. = $\frac{51}{288}$ Rtlr. = $\frac{17}{96}$ Rtlr.

XXIII. Wenn man blos auf die Art bey dieser Rechnungsart verfahren wollte, als bisher geschehen ist; so würde der Vortheil nicht weit her seyn, den sie mit sich führte: denn wir würden in den meisten Exempeln, zumahl in denen, worinnen viel Brüche, und zwar von großen Nennern vorkommen, große Zahlen erhalten, welche sehr üble Factoren vorstellen würden, die daher beym Rechnen überall unangenehm sind, und, wo man kann, vermieden werden. Wir können daher, zur Erleichterung dieser Rechnungsart, uns der verschiedenen Vortheile bedienen, welche wir bereits (9. Cap. XXI. 9. 10. 13.) bey der Betrachtung der Proportionen kennen gelernt haben, welche sämmtlich dahin auslaufen, daß dadurch 1) manche Zahlen ganz hinweg geschafft, 2) andre große sehr verkleinert werden, ob es gleich Fälle giebt, wo sich auch diese Vortheile nicht anbringen lassen. 3) Endlich wird auch durch Hülfe der sogenannten Zerstreuung das Multipliciren und Dividiren großer Zahlen vermindert. Laßt uns jetzt, weil hierauf sehr vieles ankömmt, hiervon unter beständiger Anwendung auf Beyspiele noch etwas umständlicher reden.

Abkürzungen bey der Ketten-Rechnung.

XXIV. Es können die gleichen Zahlen in beyden Columnen gleich weggestrichen werden. Hierbey ist gar keine Rücksicht zu nehmen auf die Namen. Denn diese dienen blos zur Einrichtung der Stellung und Ordnung der Glieder, die Zahlen enthalten aber das Verhältniß, welches durch diese Veränderung nicht leiden kann (10. Cap. XXI. 9.).

1. Wie viel Pfund erhalte ich für 4 Gulden, wenn 3 Quent. 1 ggl. kosten, und ein Gulden 16 gl. ist?

— ℔	=	4 Guld.
3 Guld.	=	8 ß ggl.
1 ggl.	=	3 Qu.
4 Qu.	=	1 Lt.
8 ß Lt.	=	1 ℔
2.	3	1½ ℔ das Gesuchte.

32 in der Divisions-Columne und 32 in der andern, werden gegen einander durchgestrichen; 4 in der Divisions-Columne eben so gegen die 4 in der andern. Folglich bleiben in der erstern 2, in der letztern 3 übrig. 2 in 3 = 1½, welches hier Pfunde sind, als das Gesuchte.

2. Ohngeachtet dieser weggestrichenen Zahlen, muß doch (10. Cap. XXI. 9.) die gefundene die rechte seyn.

3. Man sieht aber, wie sehr dieses Verfahren diese Rechnung verkürzt, und also erleichtert! Statt des weitläufigen Multiplicirens in beyden Columnen, und des Dividirens einer größern Zahl, in eine andere größere ist blos die leichte Division 3 : 2 = 1½ vorzunehmen gewesen.

Dieses Exempel wäre nämlich, außer einigen dabey angebrachten Abkürzungen, noch gewesen:

32	4)	32	4)	
128	2)	128	3)	
256		384	256	
		256	$1\frac{1}{2}\frac{2}{5}\frac{8}{6}$ ℔ = $1\frac{1}{2}$ ℔.	
		128		

4. Ingleichen: 24 Ellen kosten 9 Rthlr., was 1 Elle?

— ggl.	=	1 Elle
24 Ellen	=	9 Rtlr.
1 Rtlr.	=	24 ggl.

9 ggl. das Gesuchte.

1) 24 gieng gegen 24 auf.

2) Es blieb in der Divisions-Columne 1. in der andern 9, welche also das Gesuchte, hier 9 ggl., waren (XIX. 2.).

XXV. Es wird auch die Rechnung abgekürzt, wenn man mit einer Zahl in einer Columne in eine Zahl der andern Columne dividirt, und zwar muß die letztere eine solche seyn, worin die erstere aufgeht. Es kömmt statt der erstern, welche durchstrichen wird, der Quotient 1. zu stehen, und statt der andern, welche auch durchstrichen wird, ihr Quotient aus der ersten Zahl. Dieser Quotient wird nun in der Columne, worinn er steht, als ein ordentlicher Factor angesehn und behandelt.

20 Pfund kosten 5 Rtlr., was kosten 2 Pfund?

	— ggl.	=	2 ℔	
4	24 ℔	=	5 Rtlr. 1.	
	1 Rtlr.	=	24 ggl.	
	4.		24 × 2 = 48	4 | 12 ggl.

1. Wir dividirten mit der 5 in 5 = 1. Die 5 ausgestrichen, dafür 1 gesetzt. Nun 5 in 20, 4mahl;

die 20 ausgestrichen; der Quotient 4 wird nebenbey gesetzt. Nun ist in der Divisions-Columne noch 4, in der Multiplications-Columne noch 24 × 2, giebt 48, darinn mit 4 dividirt, giebt 12, als das Gesuchte.

2. Die 1 als Quotient setzt man nicht auf die Seite, weil das unnütz ist (3. Cap. XI. 2.).

4 Zentner kosten 220 Rtlr., was kostet ein Pfund?

— ggl.	=	1 ℔		
xx℘ ℔	=	1 Zentn.		
4 Zentn.	=	ℨℨ℘ Rtlr.	2.	
1 Rtlr.	=	ℨ4 ggl.	6.	
				12 ggl.

110 in 220, 2mahl. Streichet 110 aus. Neben 220, welches auch ausgestrichen wird, setzet 2; 4 in 24, 6mahl. Streichet 4 aus, und neben 24, welches gleichfalls ausgestrichen wird, setzet die 6, so ist 6 × 2 = 12, welches hier das Gesuchte wird, weil die Divisions-Columne 1 hat.

XXVI. Die Zahlen, welche durch Versetzung der Nenner bey Brüchen in die andre Columne daselbst entstehn, so wie auch die, so durch Resolution vermischter Brüche in unächte hervorgebracht werden, werden eben so zur Aufhebung gebraucht. Z. B. 3 Lt. kosten $2\frac{1}{2}$ Pf., was $6\frac{3}{4}$ Pfund?

4. — ggl.	=	$℘\frac{ß}{4}$ ℔.	ℨℨ.	9
1 ℔	=	ßℨ Lt.		8
2 ß Lt.	=	$ℨ\frac{x}{ℨ}$ Pf.		5
12 Pf.	=	1 ggl.		

2 × 12 = 24.	9 × 8 × 5 = 360 / 120 | 24
	15 ggl.

1. Weil

1. Weil nämlich solche hinübergebrachten Nenner ordentliche Factoren werden, so sind sie eben der Behandlung, als die schon vorhandenen Factoren, unterworfen.

2. Hier entstand aus $6\frac{3}{4}$ ℔ der unächte Bruch $\frac{27}{4}$. Die 27 wurden nun, so wie die 4, eine jede in ihrer Columne, als die andern Zahlen angesehen und zum Aufheben gebraucht. 3 in 27, 9mahl. 4 in 32, 8mahl.

XXVII. Man hebet auch die Zahl, welche man aus dem Aufheben auf der einen Seite als einen neuen Factor erhält, von neuem eben so auf, wenn sie dazu sonst fähig ist. Z. B. das Exempel (XXVI.).

— ggl.	=	2 ℔
4. ℔	=	5 Rlr. 1.
1 Rtlr.	=	℔4 ggl. 6.

2 ✕ 6 = 12 ggl.

Hier huben wir die 4 durch 4 ganz auf, 4 in 4, 1mahl; 4 in 24, 6mahl. Dadurch ward die Divisions-Columne ganz aufgehoben, und in der andern entstand 6 ✕ 2 = 12, als das Gesuchte.

1. Das darauf folgende Exempel (XXVII.) konnte auf diese Art noch weit mehr verkürzt werden; es blieb nämlich darinnen noch in der Divisions-Columne 12 und 2 und in der Multiplications-Columne 9, 8, 5 übrig. Wir können nämlich noch so viel aufheben, daß blos 5 ✕ 3 = 15 ggl. als das Gesuchte übrig bleiben.

4. — ggl.	=	$6\frac{B}{4}$ ℔. ℔. 9. 3.
1 ℔	=	B℔ ℔. 8. 4
℔. B ℔.	=	℔$\frac{X}{B}$ Pf. 5
B. X℔ Pf.	=	1 ggl.

5 ✕ 3 = 15 ggl.

Hier

Hier sagten wir (man betrachte dies Exempel im vorhergehenden, nachdem noch auf der linken Seite 2, 12, und auf der rechten 9, 8, 5 übrig geblieben waren): 2 in 8, 4 mahl. Die 2 weg, und statt der 8, 4 gesetzt; ferner 4 in 12, 3 mahl. Die 4 weg; statt der 12, 3 gesetzt. Endlich 3 in 9, 3 mahl. Die 3 weg, und statt der 9, 3 gesetzt. Auf diese Art war die ganze Divisions-Columne aufgehoben, und in der Multiplications-Columne stand 5 und 3, welches, mit einander multiplicirt, die 15 ggl. gab.

2. Solche Fälle werden den nützlichen Gebrauch der Kettenrechnung auf das deutlichste zeigen.

XXVIII. Wenn sich eine einzelne Zahl zuweilen gegen eine andere nicht aufheben läßt, so kann dies doch öfters auf die Art geschehen, daß man in einer Columne zwey Zahlen mit einander multiplicirt, und ihr Product gegen die andere stellt. Z. B.

3 Pfund kosten 8 Rtlr., was 4 Loth?

— ggl.	=	4 Lt.	}	℔
℔ Lt.	=	1 ℔		
℔ ℔	=	8 Rtlr.		
1 Rlr.	=	24 ggl.	8	

8 = 8 ggl.

1. Hier ist 8 × 4 = 32; folglich wird 32 auf der einen, und 4 und 8 auf der andern Seite ausgestrichen.

2. 3 in 24, 8 mahl; folglich wird 3 auf der einen Seite ausgestrichen, und statt 24 auf der andern Seite 8 gesetzt.

3. Diese 8 bleibt, weil 1 in der ersten Columne mit ihr multiplicirt, und 1 auf der linken in sie dividirt, sie nicht ändert, unverändert, und ist das Gesuchte, nämlich 8 ggl.

1 Loth

1 Loth kostet 3 Pf., wie viel erhalte ich für 4 Rtlr.?

	— ℔	=	4 Rlr.
	1 Rlr.	=	24 gl.
	1 gl.	=	12 Pf.
℘℘	3 Pf.	=	1 Lt.
	32 Lt.	=	1 ℔

12 ℔.

1. Hier ward $32 \times 3 = 96$, welches leicht zu finden war, daher ward 3 und 32 durchstrichen und dafür 96 gesetzt. $24 \times 4 = 96$, daher 24 und 4 durchstrichen und 96 gesetzt. Nun hebt 96 einander auf beyden Seiten auf, daher wird beydes durchstrichen. In der Divisions-Columne wird nun 1 erhalten, die nicht dividirt. Die 12 bleibt also unverändert, und wird das Gesuchte, nämlich 12 Pfund.

2. Hier zeigt sich, wie vortheilhaft die Kettenrechnung in manchen Fällen ist, indem sie das beschwerliche Multipliciren und Dividiren ganz entbehrlich macht.

XXIX. Man kann zuweilen vermittelst der Multiplication dreyer, oder wohl gar mehrerer, Factoren, auf der einen Seite unter einander, eine Zahl erhalten, welche in einer Zahl in der andern sich aufheben läßt. Z. B.

6 Ellen kosten 36 Fl., wie viel Rtlr. kostet $\frac{1}{2}$ Elle, wenn 3 Fl. 2 Rtlr. betragen?

	32. — Rtlr.	=	$\frac{x}{32}$ Elle
℘℘	6 Ellen	=	36 Fl.
	3 Fl.	=	2 Rtlr.

2 Rtlr. das Gesuchte.

Denn wegen des Bruchs $\frac{1}{2}$ Elle, kam die 2 aus der rechten Columne in die linke. $2 \times 6 = 12$ und

12 ✕ 3 = 36. folglich 2, 6, 3, ausgestrichen und 36 gesetzt. 36 hebt 36 auf der andern Seite auf. Folglich bleibt daselbst 2 übrig, welches die gesuchten Rthlr. sind.

Wenn 2 Qu. 3 Pf. kosten, wie viel Pfund erhalte ich für 8 Gulden, wenn 1 Fl. ist gleich $\frac{2}{3}$ Rtlr.?

	— ℔	=	8 Fl.
℔.	1 Fl.	=	$\frac{\text{℔}}{\text{ß}}$ Rtlr.
	1 Rtlr.	=	℔ ✕ gl. 8
	1 gl.	=	✕ ℔ Pf. ß ℔
	ß Pf.	=	℔ Qu.
	4 Qu.	=	1 Lt.
	ß ℔ Lt.	=	1 ℔

8 ℔ das Gesuchte.

1. Denn von $\frac{2}{3}$ der Zähler 2 ✕ 2 = 4 ✕ 8 = 32. Diese 32 gegen 32 Loth aufgehoben.

2. 3 (der Nenner von $\frac{2}{3}$) ✕ 4 = 12 gegen die 12 Pf. aufgehoben.

3. 3 in 3, 1 mahl, die 3 ausgestrichen linker Hand. 3 in 24, 8 mahl, die 24 gl. ausgestrichen, dafür 8, welches, weil es in der Multiplications-Columne allein bleibt und in der Divisions-Columne 1 bleibt, das Gesuchte, nämlich 8 Pfund ist.

XXX. Man erleichtert sich auch zuweilen das Aufheben sehr, wenn man sieht, daß eine große Zahl durch eine andere aufgehen würde, wenn die erstere, vermittelst einer andern fremden Zahl (d. i. die im Exempel nicht vorhanden ist,) multiplicirt würde. Man nimmt alsdann eine solche Multiplication vor, schreibet aber sogleich den Multiplicator in die andre Columne hin. Z. B.

Was kosten 6 Zentner, wenn 44 Pfund 10 Rthlr. kosten?

— Rtlr.	=	6 Zentn.	3.
1 Zentn.	=	xxø ℔	5.
ℵ. ℵℵø 44 ℔	=	10 Rtlr.	

150 Rtlr.

In diesem Exempel gieng keine Zahl in der andern auf. Da aber 110 in 220 aufgeht, so multiplicirten wir 44 ℔ mit der 5, wodurch wir 220 erhielten. Deswegen setzten wir aber auch gleich den Multiplicator 5 auf die andre Seite, neben 110 ℔. Nun 110 in 220, 2mahl; die 220 ausgestrichen, dafür 2 gesetzt. Die 110 ward auch ausgestrichen, und statt ihrer war 5 gesetzt. Darauf: 2 in 6, 3 mahl. Die 2 hinweg, so war die Divisions-Columne ganz aufgehoben. In der Multiplications-Columne stand nun 10. 5. 3. Dieser Vortheil kommt zuweilen bey großen Exempeln sehr zu statten.

XXXI. Es gereicht auch zur Abkürzung dieser Exempel, daß man die Zahlen verkleinert, wenn sie sich gleich nicht aufheben lassen. Z. B. wir hätten 6:9, so können wir dafür setzen 2:3, indem wir beyde durch einerley Zahl, die darinnen aufgeht, nämlich 3, dividiren, und die Quotienten nehmen (9. Cap. XV. 3. und XXI. 14.). Z. B.

1 Loth kostet 3 Pf., wie viel erhalte ich für 20 Rtlr.?

— ℔	=	20 Rtlr.	
1 Rtlr.	=	ℵ4 gl.	3
1 gl.	=	xℵ Pf.	
ℶ Pf.	=	1 Lt.	
4 ℶℵ Lt.	=	1 ℔	

20 × 3 = 60 ℔

Hier gieng 24 in 32 nicht auf. Wir dividirten daher mit einer Zahl in beyde, welche in beyden aufgieng,

gieng, und zwar mit der möglichst größten, um den kleinsten Quotienten zu erhalten. Dazu schickte sich die 8 am besten. 8 in 24, 3 mahl, die 3 hingesetzt; 8 in 32, 4 mahl, die 4 hingesetzt. Die 24 und 32 ausgestrichen. Nun in der Divisions-Columne $3 \times 4 = 12$, welche 12 in der Multiplications-Columne aufhebt.

1. Wir sagten vorhin mit Fleiß, die darinnen aufgeht. Denn gienge sie darinn nicht auf, so erhielte man auf der einen Seite in dem Quotienten einen Bruch mit, dessen Nenner wieder auf die andre müßte gebracht werden, welcher daselbst einen neuen Factor gäbe, der, so bald er eine große Zahl enthielte, welches doch der häufigste Fall seyn würde, alsdann vom Neuen würde lästig werden.

2. 8 Leipziger Ellen sind gleich 7 Nürnberger Ellen. 9 Nürnberger Ellen gleich 5 Pariser. 1 Pariser Elle Seidenzeug kostet 9 Livres, 5 Livres sind 2 Gulden Courantgeld, 3 Gulden betragen 2 Rtlr., was kosten 12 Leipziger Ellen Seidenzeug?

– Rtlr.	=	x℔ Leipz. Ellen	℔
℔. 8 Leipz.	=	7 Nürnb.	
☉ Nürnb.	=	5 Paris.	
1 Paris.	=	9 Livres	
5 Livres	=	℔ Guld.	4 2
℔ Guld.	=	℔ Rtlr.	

$7 \times 2 = 14$ Rtlr.

Hier haben wir fast alle bishero gezeigten Arten der Abkürzung angewandt.

9 hub sich mit 9 auf,
5 mit 5.
4 in 8 2mahl; die 8 ausgestrichen, und eben die
4 in 12, 3mahl; die 12 ausgestrichen.
3 Gulden gegen 3 Leipziger Ellen ausgestrichen.

2 Gul-

2 Gulden ✕ 2 Rtlr. = 4; die 4 ausgestrichen.
2 Leipz. Ellen in diese 4 gleich 2; die 2 Leipz. Ellen ausgestrichen, worauf in der Divisions-Columne keine Zahl mehr vorhanden ist. Darauf 7 ✕ 2 ist 14; sind 14 Rtlr. als das Gesuchte.

3. Wenn in London 1 Gärde Seidenzeug $6\frac{3}{4}$ Sch. St. kostet; 1 Sch. St. $5\frac{5}{6}$ Rtlr. in Leipzig ist; 1 Rtlr. Leipz. Courant 40 Stüv. Holländ. beträgt; 20 Stüv. 1 Guld. Holländ. sind; 5 Gärden 8 Leipz. Ellen machen: wie viel Leipziger Ellen solches Zeuges erhalte ich für 450 Gulden Holländisch?

— Leipzig. Ell. = 48 ℔ Holl. Guld. 8 ℔. 8
1 Guld. = 12 ℔ Stüv.
4 4 ℔ Stüv. = 1 Rtlr. in Leipz.
7 ℬ ℬ. 8 $\frac{8}{6}$ Rtlr. = 1 Sch. Serl. 6. 2
ℬ ℋ 6 $\frac{ℬ}{4}$ Sch. Sterl. = 1 Gärd. 4
8 Gärd. = 8 Leipzig. Ell.

$$7 \quad 8 \times 4 \times 2 = 64 \,|\, \overset{7}{9\frac{1}{7}}$$

Leipz. Ell.

Hier hieß es: 9 in 27, 3 mahl; die 27 ausgestrichen. 9 in 450, 50 mahl; die 450 ausgestrichen. 10 in 40, 4 mahl; 10 in 50, 5 mahl. Die letztern 5 in 37, 5 mahl. 3 in 6, 2 mahl. So behält die Divisions-Columne blos 7, die andern 8. 4. 2.

XXXII. So wie man vermittelst der Multiplication zweyer Glieder mit einander zuweilen eine Zahl erhalten kann, mit welcher sich eine andre in der andern Columne aufheben, oder füglich vermindern läßt (XXVIII. 2c.), so kann auch oft mit einigem Vortheil eine zusammengesetzte Zahl (3. Cap. XXI.) in ihre Factoren zerlegt, und durch diese ein schickliches Aufheben andrer Zahlen bewürket werden. Z. B.

Wieviel kosten 18 Zentn., wenn 8 Zentner 3 Rtlr. kosten?

— Rtlr. = 18 Zentn. 9

4 } 8 Zentn. = 3 Rtlr.
2 }

4 | 27 | 6¾ Rtlr.

Es gieng die 8 weder in 18, noch die 3 in 8 auf. Löset daher die 8 in 4 × 2 auf. Nun 2 in 18, 9mahl ꝛc.

Oder: — Rtlr. = 288 ℔ 83

3 } 8 ℔ = 4 Rtlr.
3 }

3 : 332 | 110⅔ Rtlr.

9 gieng in 255 nicht auf. Saget: 9 = 3 × 3. Nun 3 in 255 = 83 u. s. w.

Wenn 4 Zentner 210 Rthlr. kosten, was kosten 6 Zentner?

— Rtlr. = 6 Zentn. 3

2 } 4 Zentn. = 2 × 6 Rtlr. 105
2 }

315 Rtlr.

Da 4 weder in 6 noch in 210 aufgieng, so zerleget es in 2 × 2. Nun 2 in 6, 3 mahl; 2 in 210, 105 mahl. u. s. w.

XXXIII. Befinden sich in den beyden Columnen Zahlen mit Nullen, so hilft man sich zuweilen, wenn man die Nullen von einer Zahl, die sich nicht aufheben läßt, an eine andre hängt, in welcher eine mit Nullen bereits versehene Zahl der andern Columne füglich aufgeht. Z. B.

Wieviel

Wie viel kosten 40 Pfund, wenn 800 Pfund kosten 180 Rtlr.?

— Rtlr. = 40 ℔
800 ℔ = 180 Rtlr.

Nehmet die 0 von 180 Rtlr. und setzet sie zu den 40 ℔. Darauf 400 in 800, 2 mahl. Und: 2 in 18, 9 mahl. Folglich stünde die Rechnung so:

— Rtlr. = 40 ℔ 400.
2. 800 ℔ = 180 Rlr. 18 9.

9 Rlr.

XXXIV. Nach Maaßgabe der Umstände bedient man sich auch noch andrer kleiner Vortheile. Z. B. Man verändert zuweilen die Nenner der Brüche, um einer Primzahl, oder andern unbequemen, auszuweichen, und eine gefälligere dafür zu erhalten. Z. B. $5\frac{1}{4}$ giebt den unreinen Bruch $\frac{21}{4}$, wo die 21 nur auf Fall bequem wird, wenn auf der andern Seite eine 7, oder 3 steht. Bequemer ist es gewöhnlich in diesem Falle, statt $5\frac{1}{4}$ zu setzen $5\frac{2}{8} = \frac{42}{8}$; oder, statt $5\frac{1}{2} = \frac{11}{2}$, setzt man oft vortheilhafter $5\frac{2}{4} = \frac{22}{4}$ u. s. w.

XXXV. Hat man größere und kleinere Sorten neben einander, z. B. Rthlr. und ggl.; oder Zentn. Pfunde und Lothe, so kann man der Umstände, welche die Verwandlung derselben in einen unächten Bruch, und das Hinübertragen des Nenners in die andre Columne macht, oft mit Vortheil überhoben werden, wenn man sich der Zerstreuung bedient. Bey dieser Anwendung der Zerstreuung hat man aber genaue Rücksicht auf die Namen der Glieder zu nehmen (wie bey der Zerstreuung in den Exempeln der Regel de Tri); indem uns diese Namen belehren, was die Untersorten für Nenner haben, wenn sie als Brüche der höhern

Sorten betrachtet werden. Z. B. 8 ggl. sind $\frac{1}{3}$ Rtlr.; 9 Loth sind $\frac{1}{4} + \frac{1}{32}$ Pfund, oder $\frac{1}{4}$ ℔ + $\frac{1}{8}$ aus $\frac{1}{4}$ Pfund. Beyspiele werden diese Anwendung der Zerstreuung auf Exempel der Kettenrechnung leicht zeigen.

1. Das erste mag ein ganz leichtes Exempel dieser Art seyn.

3 Pfund kosten 2 Rtlr. 8 ggl., was 5 Pfund?

– Rtlr. = 5 ℔.	✕ 2 = 10 Rtlr.
3 ℔ = 2 Rtlr. 8 gl.	$\frac{1}{3}$ = 1 = 16 gl.

3 : 11 Rlr. 16 gl.

3 Rlr. 21 gl. 4 Pf. das Gesuchte.

Durch Hülfe der Zerstreuung wurden die 2 Rtlr. 8 gl. in 5 Pfund so multiplicirt, daß 8 gl. als $\frac{1}{3}$ Rtlr. angesehn und behandelt ward. Dadurch entstand der Quotient 1 Rtlr. 16 gl. der hier als ein Posten angesehn und zu den 10 Rthlrn. addirt werden mußte. In die Summe 11 Rtlr. 16 gl. ward nun mit dem Producte aus der Divisions-Columne, welche hier blos 3 enthielt, dividirt, welches das Gesuchte zu 3 Rtlr. 21 gl. 4 Pf. gab.

2. 5 Loth kosten 9 Rtlr. 16 gl. 8 Pf., was kosten 3 Pfund?

– Rlr. = 3 ℔	✕ 9 = 27 Rlr. – gl.
1 ℔ = 32 Lt.	1 = – ($\frac{1}{3}$ } 16 gl.
	1 = – (1 }
5 Lt. = 9 Rlr. 16 gl. 8 Pf.	– = 2 (= $\frac{1}{12}$ | 8 Pf.

5. 29 Rlr. 2 gl. ✕ 8 } 32
232 = 16 = ✕ 4 }
5 : 930 = 16 = \| 186 Rtlr.
$3\frac{1}{5}$ gl.

Es war natürlich, daß, so bald 9 Rtlr. 16 gl. 8 Pf. durch die Zerstreuung mit 3 Pfund multiplicirt waren, das

das entstandene Product 29 Rtlr. 2 gl. blos noch mit 32 multiplicirt, und dieses Product hernach mit 5 dividirt werden mußte.

3. 7 Pfund kosten 11 Rtlr., was kosten 13 Pfund 9 Loth?

– Rtlr. = 13 ℔ 9 Lt.	130 Rtlr.
7 ℔ = 11 Rtlr.	13
	143 Rtlr.

9 Lt. { 8 Lt. | 4 = 2 = 18 gl.
1 = | 8 = – = 8 = 3 Pf.

7 : 146 Rtlr. 2 gl. 3 Pf.
20 Rtlr. 20 gl. $10\frac{5}{7}$ Pf.

4. Für 37 Rtlr. erhält man 49 Pfund 11 Loth, wie viel für 19 Rtlr.?

– ℔ = 19 Rtlr.	49 × 20
37 Rtlr. = 49 ℔ 11 Lt.	980 – 49
	931 ℔

4 = 24 Lt. $\frac{1}{4}$ | 8 Lt.
1 = 6 = $\frac{1}{4}$ | 2 Lt. } 11 Lt.
– = 19 = $\frac{1}{2}$ | 1 Lt.

37 : 937 ℔ 17 Lt.
25 ℔ $10\frac{1}{37}$ Lt.

XXXVI. Ist ein Ansatz gemacht, in welchem die niedern Sorten schon nach ihren Nennern, vermittelst der Kettenverbindung, ausgedrückt sind, das heißt, wo die niedern Sorten dergestalt als Brüche angesehen werden, daß die Zahl der Eintheilung der 1, woraus sie hervorgehn, schon in der andern Columne besonders ausgedrückt stehet, so kann man mit diesen Sorten nicht auf diese Art verfahren. Z. B. wie viel Rthlr. kosten 97 Pfund, wenn 5 Pfund 8 ggl. kosten?

Machen wir nun den Ansatz nach der VIII. gelehrten Art:

— Rtlr.	=	97 ℔
5 ℔	=	8 gl.
24 ggl.	=	1 Rtlr.

so würde es zwar scheinen, daß, da 8 ggl. = ⅓ von 1 Rthlr. sind, mit 3 in 97 Pfund dividirt werden könnte, und auf diese Art ein Product von Rthlr. erhalten werden müßte; ließe man aber die Divisions-Columne unverändert, und multiplicirte 24 mit 5, und dividirte mit diesem Producte auf die gewöhnliche Art, so würde man das Gesuchte um 24 mahl zu klein erhalten.

Man bedenke nämlich folgendes: Sehen wir 8 ggl. als ⅓ Rthlr. an, so nehmen wir sie nach ihrem wahren Werthe; werden sie nun noch durch 24 dividirt, so werden sie 24 mahl weniger, als sie sind. Die 24 werden ja in dem Ansatze blos deswegen gesetzt, weil man 8 ggl. in der Multiplications-Columne als Rthlr. ansehen und als solche behandeln will, da sie doch 24 mahl weniger sind. So bald wir aber, statt der Multiplication mit 8, hier eine Division mit 3 vornehmen, und folglich 8 ggl. nach ihrem wahren Werthe nehmen, so folgt, daß die 24 in der Divisions-Columne wegfallen müsse. In diesem Falle streichet also die 24, und in jedem andern Falle eine jede Zahl, mit der es eine ähnliche Bewandniß hat, aus, ohne daß dagegen in der Multiplications-Columne eine gleiche aufgehoben werde. Wir rechnen also:

— Rtlr	=	97 ℔ : 3	32 Rtlr. 8 gl.	
5 ℔	=	8 gl.		
~~24~~ gl.	=	1 Rtlr.		

5 : 32 Rtlr. 8 gl.

6 Rtlr. 11 gl. $2\frac{2}{5}$ Pf.

1. Wenn 15 Rtlr. 9 gl. geben 70 Pfund 5 Loth 2 Quent., was geben 79 Rtlr. 15 gl. 2 Pf.?

— ℔ = 79 Rtlr. 15 gl. 2 Pf.
15 Rtlr. 9 gl. = 70 ℔ 5 Lt. 2 Qu.

15 X 6 ... 2934 Pf.
90 X 4 + 9 ... 70
369 X 6 ... 16053 80 ℔
2214 X 2 ... = 2866 = 24 Lt.
4428 Pf. ... = = 716 = 22 =
5 Lt. { 1/8, 1/4, 1/2 } 2 Qu. ... = = 358 = 11 =
4428 ... 16093 21 ℔ 25 Lt.
13284 ... 15241
28092 ... 13284
26568 ... 19577 ℔ + 2/4 5/4 2/8 Lt.
4428
14 Lt. 6/4 5/4 7/2 8 Lt.

79. X 6
474. X 4
1896. + 15
19111. X 6
11466. X 2 + 2
2934 Pf.

363 ℔. 14 6/4 5/4 7/2 8 Lt. das Gesuchte.

XXXVII. Die sämmtlichen Abkürzungen, welche wir bisher an den Exempeln der Kettenrechnung gezeigt haben, sind auch auf diejenigen Exempel dieser Rechnungsart anwendbar, welche zusammengesetzte Glieder (X.) haben. In dem Exempel:

$$\text{— Himpten} = \left\{\begin{matrix} x\text{ø Pers.} \\ \text{s Jahr.} \end{matrix}\right\}4$$

$$4\left\{\begin{matrix} \text{zø Pers.} \\ \text{1 Jahr} \end{matrix}\right\} = 112 \text{ Himpt.}$$

$$112 \times 4 = 448$$

Denn 5 in 20, 4 mahl. 4 in 16, 4 mahl. So kommt 20 und 4 aus der Divisions-Columne hinweg; in der Multiplications-Columne kommt 5 und 16 hinweg, und statt 16 haben wir daselbst 4.

1. Hier sind nämlich die sämmtlichen Zahlen einzelne Glieder, welche blos der deutlichern Uebersicht wegen zusammengestellt sind. Deswegen können auch mit ihnen die Verringerungen sicher vorgenommen werden, wie bey andern Fällen.

2. Da auch diese Zahlen hier als von einerley Werthe angesehen werden müssen (indem z. B. keine Unterabtheilungen statt finden), so hat man bey dieser Verringerung auch auf die Namen nicht Hinsicht zu nehmen.

3. Was geben 600 Rthlr. Capital in 4 Jahren an Zinsen, wenn 2400 Rthlr. Capital in 15 Jahren 900 Rthlr. Zinsen geben?

$$\text{— Rtlr.} = \left\{\begin{matrix} \text{øøø Rtlr.} \\ \text{4 Jahr} \end{matrix}\right.$$

$$4\left\{\begin{matrix} \text{z4øø Rtlr.} \\ \text{xs Jahr} \end{matrix}\right\} = \text{øøø Rtlr. 60.}$$

60 Rtlr. Zinsen, das Gesuchte.

4. 24 Arbeiter arbeiten 5 Wochen, und täglich 9 Stunden, und erhalten 36 Rthlr. Lohn, wieviel werden verhältnißmäßig 30 Arbeiter für 6 Wochen und täglich 15 Stunden erhalten?

$$\text{— Rtlr.} = \begin{cases} 30 \text{ Arbeit.} & 5 \\ 6 \text{ Wochen} & \\ x \text{ Stunden} & 3 \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} 24 \text{ Arbeit.} \\ 8 \text{ Wochen} \\ 9 \text{ Stunden} \end{matrix}\right\} = 36 \text{ Rtlr.}$$

$$6 \times 5 = 30$$

$$3$$

$$90 \text{ Rtlr.}$$

5. Wenn 100 Rthlr. jährlich $4\frac{1}{2}$ Rtlr. Zinsen geben, wieviel giebt ein Capital von 2520 Rtlr. in 1 Jahre 11 Monaten und 9 Tagen?

$$360 \text{ — Rtlr.} = \begin{cases} 25\,20 \text{ Rtlr. } 7. \\ 1 \text{ J. } xx \text{ M. } 9 \text{ T.} \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} 100 \text{ Rtlr.} \\ 1 \text{ Jahr} \end{matrix}\right\} = 4\frac{x}{20} \text{ Rtlr. } 9$$

23 = M.	
30 T.	
699 × 9	
6291 × 7	
44037	$220\frac{7}{400}$ R.

200

Interess.

XXXVIII. Wir haben bereits gesehen, daß man bey einem Exempel von zusammengesetzten Proportionen sehr viele mannigfaltige Glieder in den Ansatz aufnehmen, und vermittelst der Kettenverbindung zusammen stellen kann. Wir wollen auch einige Exempel dieser Art hinzufügen, um zu zeigen, theils, wie dies noch auf andere Art geschehen könne, theils, wie man dabey eben die bisher gebrauchten Abkürzungen zur großen Beförderung einer geschwinden Rechnung anwenden könne.

1. Ein Faß Butter enthält Netto 258 Pfund Butter. 1 Pfund kostet in Hamburg $6\frac{1}{2}$ Schilling. 1 Mark Hamb. Cour. hält 16 Schill., und $13\frac{1}{4}$ Mark machen 5 Rthlr. in Golde, welche wiederum $5\frac{3}{4}$ Rthlr. Preuß. Courant betragen: wieviel wird diese Butter in Preuß. Courant kosten?

— Rlr. Pr. = ℔ ß ₰ ℔ 129 | 129 × 20 + 3
1 ℔ = ß $\frac{x}{₰}$ Schill. 13 | 2580
₰ 4 x ß Sch. = 1 Mark | 387
53 x ß $\frac{x}{4}$ M. = ß Rlr. x 4 | 29670 × 10 + 3
4 ß Rlr. x = ß $\frac{ß}{4}$ Pr. Cour. 23 | 8901
| 38571

212 × 4 | 848 : 38571 | $45\frac{4}{8}\frac{1}{4}\frac{1}{8}$ Rtlr. Pr. Cour.
848

2. Es kostet in Hamburg 1 Orthof Wein 138 Mark und hält 240 Maaß. Wenn nun 1 Mark 16 Schilling enthält, und 13 Mark 8 Schilling 5 Rthlr. Gold machen und 5 Rthlr. Gold 5 Rthlr. 16 ggl. Pr. Cour. sind, was kostet 1 Maaß dieses Weins in Pr. Courant?

— gl. = 1 Maaß
... 4 ß ₰ 4 ß M. = x ß 8 Mark 23 | 23 × 10 + 7
x ₰ ß ... 27 x ß $\frac{x}{₰}$ M. = ß Rlr. x 2 | 230
8 ... ß 5 Rlr. x = ß $\frac{₰}{ß}$ P.C. 17 | 161
1 Rlr. P.C. = ₰ 4 gl. P.C. | 391 × 2
| 782

135 : 782 | $5\frac{1}{4}\frac{0}{3}\frac{7}{5}$ gl. Pr. Cour.

Betrügen nun Fracht, Spesen und andere Unkosten noch 10 Rthlr. 9 gl. Preuß. Courant, so stünde 1 Maaß noch zu

24 gl.
10
240 : 240 gl. : | $1\frac{2}{2}40$ gl.
dazu | $5\frac{1}{1}\frac{0}{3}\frac{7}{5}$ =
$6\frac{5}{6}\frac{3}{4}\frac{7}{8}\frac{2}{0}$ gl. Preuß. Cour.

3. Wenn eben daselbst 100 Pfund Netto einer Waare 23 Mark 12 Schill. Cour. kosten, 125 Mark Courant 100 Mark Banco sind, 300 Mark Banco $143\frac{3}{4}$ Rthlr. in Ld'or betragen, wieviel Rthlr. in Ld'or kosten 625 ℔ dieser Waare?

— Rlr. Ld'or. = ⅏ ℔ ℔ ℔
20. 4. ✕⅏⅏ ℔ = ✕ℬ$\frac{ℬ}{4}$ M. Cour. 95
✕✕ℬ M. Cour. = ✕⅏⅏ M. Banc.
4. ℬ⅏⅏ M. Banc. = ✕✕ℬ$\frac{ℬ}{4}$ Rlr. Ld'or 575

80 ✕ 4
320

57500 (✕ 100 − 5)
2875

320 : 54625 | $170\frac{4}{6}\frac{5}{4}$ Rtlr. Ld'or.

4. Eine Waare wird von Leipzig aus in Hamburg erhandelt unter folgenden Bedingungen: Die Waare wieget Brutto 6275 Pfund (7. Cap. Seite 111.); der Käufer bekömmt an 100 Pfund Brutto eine Vergütung von 10 Pfund, als Thara, d. i. für jede 100 Pfund werden ihm 10 Pfund zu gute gerechnet, oder, man siehet es an, als wenn er, statt 100 Pfund Brutto, nur 90 Pfund Waare erhalten hätte. Ueber dieses wird ihm noch von 100 Pfund, 1 Pfund als gut Gewicht zu gute gerechnet, oder 100 Pfund, die er so Netto erhielt, werden nur für 99 gerechnet. Wenn nun 100 Pfund der Waare Netto 23 Mark 12 Schill. Cour. kostet; 125 Mark Courant aber 100 Mark Banco sind, und nach dem Wechselcourse 300 Mark Banco $143\frac{3}{4}$ Rthlr.

in Ld'or zu Leipzig gleich stehn, außerdem dem Käufer auf jegliche 100 Mark noch $8\frac{2}{3}$, als ein Abzug, oder Rabatt, zu gute gerechnet werden: wie viel Rthlr. in Ld'or hat der Kaufmann in Leipzig zu bezahlen?

Wir wollen alle diese Bedingungen in einen einzigen Kettenansatz bringen, ihn auflösen und hernach die Gründe des Verfahrens anzeigen, damit der Ungeübte, der in Anweisungen zu dem kaufmännischen Rechnen viele solche Exempel und Berechnungen, ohne daß darüber eine Erklärung gegeben ist, vorfindet, sich in dieselben desto eher finden, sie gründlich verstehen lernen, und in allen Fällen desto leichter und sichrer sich möge helfen können.

— Rtlr. Ld'or	=	6275 ℔ Brutto
100 ℔ Brutto	=	90 ℔ pro Thara
100 ℔ pr. Thara	=	99 ℔ gut. Gew.
100 ℔ gut. Gew.	=	$23\frac{3}{4}$ M. Hamb. Cour.
125 M. Hb. Cour.	=	100 M. Banco
$108\frac{2}{3}$ M. Banco	=	100 M. Banco pro Rabatt.
300 M. Banco	=	$143\frac{3}{4}$ Rtlr. Ld'or

In Ansehung dieses Ansatzes bemerken wir folgendes:

Erstlich, es werden nicht die 6275 Pfund Brutto bezahlt, sondern nur eine gewisse Zahl von Pfunden, welche als Netto anzusehen ist. Diese Zahl wird durch das bestimmt, was theils als Thara angesehen wird, welches 10 Pfund von 100 Pfund ist, theils, was noch pro gutes Gewicht nachgelassen wird, nämlich 1 Pfund von 100 Pfund. Folglich wird durch die in den Ansatz gebrachten Verhältnisse der Thara und des guten Gewichts zu 10 Pfund, das herausgebracht, was als Netto anzusehn, und nur zu bezahlen ist. Man hätte demnach dieses zuerst allein berechnen können, und alsdann hätte es geheißen: Wenn bey 6275 Pfund Brutto von jeden 100 Pfund, 10 Pfund als Thara abgezogen, und von jeden solchen 100 Pfund noch 1 Pfund als gutes Gewicht abge-

abgezogen werden: wieviel werden von den 6275 Pfund noch als Netto angesehen werden können, indem man blos das Netto bezahlt? Saget:

— ℔ Nett. = ø ß ß ℔ Br. x ß ß. 251 ⋈ 99
2 x ø x ø ø ℔ Brut. = ø ø ℔ Th. 9. 25100
20 x ø ø ℔ Th. = 99 ℔ g.G. 251
x ø ø ℔ g.G. = x ø ø ℔ Nett. 24849 ⋈ 9
223641

40 | 223641 | 5591 1/4 ℔ Netto.

Wir schlossen mit 100 ℔ gut. Gew. = 100 ℔ Netto, weil das, was gutes Gewicht ist, hier als Netto bezahlt wird. Demnach wären von dem Leipziger nur 5591 1/4 Pfund zu bezahlen.

Zweytens: Wir fragen nun: was kosten 5591 1/4 Pfund Netto, in Ld'or, wenn 100 Pfund Netto kosten 23 3/4 Mark Hamb. Courant, da 125 Mark Hamb. Cour. gleich 100 Mark Hamb. Banco und 300 Mark Hamb. Banco nach dem Geldcourse gleich 143 Rtlr. Ld'or stehen?

40 — Rlr. Ld'or = ß ß ø x/40 ℔ 223641
4 x ø ø ℔ = x ß/4 M. H. C. ß ß. 19
ß. x ß x x ß M. C. = x ø ø M. Banco
4 300 M. Banc. = x 4 ß/4 Rlr. Ld'or ß 7 ß / x x ß / 23

192000 | 223641 ⋈ 20
4472820 + 3
670923
5143743 ⋈ 19
19
46293687
5143743
97731117 | 509 3/19 1/2 7/80 Rlr. L.

Dem-

Demnach hätte der Leipziger $509\frac{3}{1}\frac{1}{9}\frac{1}{2}\frac{7}{0}\frac{}{0}\frac{}{0}$ Rlr. Ld'or zu zahlen. Weil aber der Hamburger ihm auf 100 Mark noch $8\frac{2}{3}$ Mark gut thun will, d. h. wenn er für $108\frac{2}{3}$ Rlr. Waare nimmt, er nur 100 Rtlr. bezahlen soll, so muß nun noch, drittens, berechnet werden, wieviel, nach diesem Abzuge, noch zu bezahlen sey.

Nehmet an: Wenn $143\frac{3}{4}$ Rtlr. Ld'or 300 Mark Banco sind, $108\frac{2}{3}$ Mark Banco aber als 100 angesehen werden sollen, wieviel Rtlr. Ld'or werden nun $509\frac{3}{1}\frac{1}{9}\frac{1}{2}\frac{7}{0}\frac{}{0}\frac{}{0}$ Rtlr. Ld'or seyn?

$$\frac{\text{ℬ}\,\text{ϰ}\,\text{ℋ}}{\text{ϰ}\,\text{ϕ}\,\text{ϰ}\,\text{ϕ}\,\text{ϕ}\,\text{ϕ}} = \frac{\text{ℬ}}{4}$$

ℬ ϕ ϕ Mark Banco $= \frac{\text{ℬ}}{4}$ Rlr. Ld'or

ϰ ϕ ϕ Mark Banco $= \frac{\text{ϰ}}{\text{ℬ}}$ ϕ ϕ 8 Rlr. Ld'or

ℬ ϕ ϕ M. Banco $= \frac{\text{ℬ}}{4}$ ϰ 4 ℬ Rlr. Ld'or

1920 ϕ ϕ	326	6259 ϕ ϕ
9773117	3	29319335 1
29319335 1		4682 $\frac{2}{6}\frac{6}{2}\frac{2}{3}\frac{7}{9}\frac{9}{2}\frac{1}{0}$ Rlr. Ld'or

Diese

Diese drey Sätze sind vorhero in einen einzigen, zur großen Erleichterung der Berechnung, nach den ordentlichen Regeln des Kettenansatzes gebracht worden. Wenn wir nun denselben mit Anwendung der hierbey möglichen Abkürzungen gehörig berechnen, so erhalten wir dasselbe Gesuchte als vorhin:

	— Rr. L. = ø x 7 8 ℔ Br.	x x 8 8.	251.
2.	x ø x ø ø ℔ Br. = ø ø ℔ pr. Th.	ø.	3.
	x ø ø ℔ p. T. = 99 ℔ g. Gew.		
4.	x ø ø ℔ g. G. = x 3 $\frac{3}{4}$ M. H. Cour.	ø 8.	19
5.	x 8. x x 8 M. H. C. = x ø ø M. Banc.		
326.	x ø 8 $\frac{x}{3}$ M. B. = x ø ø M. B. p. Rab.		3.
20.	x ø ø. 4. 3 ø ø M. B. = x 4 3 $\frac{3}{4}$ Rlr. Ld'or	8 7 8.	x x 8

23

326 × 4
1304 × 4
5216 × 2
10432 × 20
208640

251 × 99
25100
251
24849 × 19
496980
24849
472131 × 23
9442620
1416393
10859013 × 3
32577039 × 3
97731117 | 468 $\frac{8}{20}\frac{7}{8}\frac{5}{6}\frac{2}{40}\frac{7}{0}$ Rlr. Ld'or

welches genau das vorige ist,

oder 468 Rlr. 10 gl. 1 $\frac{2}{3}\frac{7}{2}\frac{1}{6}\frac{3}{0}$ Pf. Ld'or

5. Wenn

5. Wenn wir sagen: daß hier eben dasselbe genau erhalten werde, was wir zuvor herausbrachten, so darf der scheinbare Unterschied der Brüche uns nicht befremden, indem das Gesuchte vorhin den Bruch $\frac{2}{6}\frac{6}{2}\frac{2}{5}\frac{7}{9}\frac{9}{2}\frac{1}{0}$ Rtlr. und hier $\frac{8}{2}\frac{7}{0}\frac{5}{8}\frac{9}{6}\frac{7}{4}\frac{}{0}$ Rtlr. bey sich führte. Der Unterschied ist nur scheinbar: denn beyde Brüche sind einerley, ob sie gleich sich nicht durch die Aufhebung als gleich darstellen lassen: denn es sind Primzahlen. Um zu erfahren, ob solche Brüche gleich sind, sehet beyde als eine Proportion an, den Zähler des ersten Bruchs für das erste, und seinen Nenner für das zweyte Glied; dann nehmet den Zähler des andern Bruchs für das dritte Glied an; suchet daraus nach der Regel de Tri das vierte Glied, so muß, wenn die Brüche gleich sind, und recht gerechnet ist, der Nenner des andern Bruches herauskommen. Kommt er nicht genau heraus, so sind die Brüche einander nicht gleich. Hier heißt es also:

262791 : 625920 = 87597 : x,

welches, nach der Regel de Tri weiter behandelt, genau 208640, als den Nenner des andern Bruchs, giebt.

6. Hätte dieses Exempel durch die Regel de Tri aufgelöset werden sollen, so wären folgende sechs Fragen entstanden, von welchen die letzte das, was wir hier zu wissen verlangten, angab. Sie waren nämlich:

Erstlich: wenn von 100 Pfund Brutto 10 Pfund für Thara gerechnet werden, wieviel wird alsdann noch 6275 Pfund Brutto bleiben? Das ist: 100 Pfund Brutto : 6275 Pfund Brutto = 90 Pfund reine Waare zu x Pfund reine Waare, giebt 5647½ Pfund reine Waare.

Zweytens: Wenn von 100 Pfund reiner Waare noch 1 Pfund für gutes Gewicht abgerechnet wird, wieviel ist alsdann noch 5647½ Pfund reine Waare? d. i. 100 Pfund reine Waare : 5647½ Pfund reine Waare = 99 Pfund Netto : x Pfund Netto, giebt 5591$\frac{1}{40}$ Pfund reine Waare, oder Netto.

Drittens: Wenn 100 Pfund = 99 Pfund ganz reine Waare, oder Netto kosten $23\frac{3}{4}$ Mark Hamb. Cour., wieviel kosten $5591\frac{1}{40}$ Pfund in solchem Courant? d. i. 100 Pfund Netto : $5591\frac{1}{40}$ Pfund Netto = $23\frac{3}{4}$ Mark Hamb. Cour. : x Mark Hamb. Cour., giebt $1327\frac{2}{3}\frac{7}{2}\frac{7}{0}\frac{9}{0}$ M. Hamb. Cour.

Viertens: Wenn 125 Mark Hamb. Cour. gleich 100 Mark Hamb. Banco sind, wieviel sind $1327\frac{2}{3}\frac{7}{2}\frac{7}{0}\frac{9}{0}$ M. H. Courant? d. i. 125 M. H. Cour. : $1327\frac{2}{3}\frac{7}{2}\frac{7}{0}\frac{9}{0}$ Mark Hamb. Cour. = 100 Mark Hamb. Banco : x Mark H. Banco, giebt $1062\frac{1}{4}\frac{1}{0}\frac{7}{0}\frac{9}{0}$ Mark Hamb. Banco.

Fünftens: $108\frac{2}{3}$ Mark Hamb. Banco sind wegen gegebenen Rabatts nur als 100 Mark Hamb. Banco anzusehen, wieviel sind nun $1062\frac{1}{4}\frac{1}{0}\frac{7}{0}\frac{9}{0}$ M. Hamb. Banco? d. i. $108\frac{2}{3}$ M. Hamb. Banco : $1062\frac{1}{4}\frac{1}{0}\frac{7}{0}\frac{9}{0}$ M. H. Banco = 100 M. Hamb. Banco : x M. Hamb. Banco, giebt $977\frac{7}{1}\frac{4}{3}\frac{5}{0}\frac{7}{4}\frac{}{0}$ M. Hamb. Banco.

Sechstens: 300 M. Hamb. Banco sind $143\frac{3}{4}$ Rtlr. Ld'or, wieviel $977\frac{7}{1}\frac{4}{3}\frac{5}{0}\frac{7}{4}\frac{}{0}$ Mark Hamb. Banco? d. i. 300 Mark Hamb. Banco : $977\frac{7}{1}\frac{4}{3}\frac{5}{0}\frac{7}{4}\frac{}{0}$ Mark Hamb. Banco = $143\frac{3}{4}$ Rthlr. Ld'or : x Rthlr. Ld'or, giebt $468\frac{2}{6}\frac{6}{2}\frac{2}{5}\frac{7}{9}\frac{9}{2}\frac{1}{0}$ Rtlr. Ld'or, welches genau das vorige ist.

7. Wer siehet nicht ein, wie unweit umständlicher und beschwerlicher diese Auflösungen, vermittelst der Regel de Tri, durch das weit mehrere Schreiben bey den Proportionen und die mehrern entstehenden, zuletzt groß werdenden Brüche, als jene, vermittelst der Kettenrechnung, geworden ist!

8. Wenn für Leipzig aus Amsterdam 500 Stück Ducaten eingewechselt werden sollen, und daselbst 1 Ducaten gleich 5 Fl. 4 Stüv. Courant gilt, 100 Fl. Banco 105 Fl. Courant betragen; ferner 250 Fl. Banco mit $141\frac{1}{4}$ Rtlr. in Leipzig gleich stehn: wieviel betragen die 500 St. Ducaten in Rtlr. zu Leipzig?

— Rtlr. = ß ø ø St. Duc. ß ø.

ß. 1 Duc. = $\frac{x}{ß}$ Fl. Holl. Cour. 26

ℓ. ℓ ø. 21. x ø ß Fl. Cur. = x ø ø Fl. Holl. Banco ℓ ø. 2

ß. 4. ℓ ß ø Fl. Bco. = x 4 x $\frac{x}{4}$ Rtlr. Leipz. 565

---

21 . 565 × 26 × 2 = 29380 | 21 1399 $\frac{1}{2\,1}$ Rtlr.

in Leipzig.

XXXIX. Es ist zwar gesagt worden (V.), daß das letzte Glied eines Kettenansatzes denselben Namen führen musse, welchen das erste Glied in der linken Columne habe; allein es pflegen auch zuweilen, der Kürze wegen, noch andre Dinge in einen solchen Ansatz gebracht zu werden, wobey denn der Ansatz zuförderst zwar auf die gewöhnliche Art gemacht wird, und sich ordentlicher Weise mit dem Gliede schließet, womit er sich anfängt; dasjenige aber, was noch auf eine verhältnißmäßige Art berechnet werden soll, dem Schlusse angehängt wird, wobey denn der Zusammenhang der Sachen die Ordnung lehrt, in welcher dieses letztere noch angesetzt werden muß.

1. Wenn 1 Ld'or 5 Rlr. in Golde macht; 103 Rlr. Gold gleich 100 Rlr. Ducat., $2\frac{3}{4}$ Rlr. Ducat. $357\frac{1}{2}$ gl. Polnisch sind, 425 gl. Polnisch 6 Fl. Holländ. Banco, 250 Fl. Holl. Banco $142\frac{1}{2}$ Rtlr. Ld'or; 5 Rtlr. Ld'or 1 Stück Ld'or machen, auf 100 Rtlr. noch 1 Rtlr. Spesen gerechnet werden: wieviel Stück Ld'or sind alsdann 2000 Stück Ld'or?

— Stück

—Stück Ld'or = 2000 St. Ld'or
1 Stück Ld'or = 5 Rtlr. dito
103 Rtlr. dito = 100 Rtlr. ℔
2¾ Rtlr. ℔ = 357½ gl. Poln.
425 gl. Poln. = 6 Fl. Holl. Banco
250 Fl. H. Banc. = 142½ Rtlr. Ld'or
5 Rtlr. Ld'or = 1 Stück Ld'or
101 = 100 pr. Spesen.

1945361 : 39124800000 | 2011 3/19 5/4 2/3 9/61 St. Ld'or.

2. Im folgenden Exempel werden noch mehrere proportionirte Sätze angehänget: Wie theuer ist 1 Zentner Französischer Waare in Leipzig, wenn 100 Pfund Netto in Frankreich 60 Livres, 3 Livres 28 Schill. Lüb. in Hamb. Banco; 48 Schill. Lüb. 1 Rtlr. Hamb. Banco 100 Rtlr. Hamb. Banco 142½ Rtlr. in Leipzig kosten? Hierzu wird noch in Anschlag gebracht, daß 100 Pfund in Frankreich 105 Pfund in Leipzig ausmachen; ingleichen wird noch gerechnet an Kosten: 4 auf 100 an Spesen überhaupt, 2 auf 100 für Assecuration; und da man an 100 noch 10 reinen Profit haben will: wie hoch wird nun in Leipzig 1 Zentner verkauft werden müssen?

Saget:

— Rlr. in Leipz. ? = 110 Leipzig. ℔
105 Leipz. ℔ = 100 ℔ in Frankr.
100 Franz. ℔ = 60 Livres
3 Livres = 28 Schill. Lübs.
48 Sch. Lübs. = 1 Rtlr. Hamb. Banco
100 Rtlr. H. B. = 142½ Rtlr. in Leipzig
100 Rtlr. = 104 weg. Spesen
100 Rtlr. = 102 weg. Assecur.
100 Rtlr. = 110 weg. Profits

150000 : 3048474 | 20 4/7 2/5 3/0 7/0 Rtlr. in Leipz.

Es kostet alsdann 1 Zentner in Leipzig $20\frac{2}{2}\frac{4}{5}\frac{2}{0}\frac{3}{0}\frac{7}{0}$ Rtlr. Hier fügten wir die Spesen, Assecuranzgelder und den Profit von 10 auf 100 noch dem Schlusse des Kettenansatzes mit an. Die Verbindung ward blos durch Rtlr. unterhalten, und es blieb eine wahre Verbindung, obwohl die weitere Benennung der Rtlr. nicht ferner verband. Es hieß nämlich: — wenn 100 Rtlr H. Banco gleich sind $142\frac{1}{2}$ Rtlr. in Leipzig; und 100 Rtlr. als 104 Rtlr. gelten, wegen der Spesen; ingleichen 100 Rtlr. als 102 Rtlr. gelten, wegen Assecuration; und 100 Rtlr. als 110 Rtlr. gelten, wegen des auf 100 Rtlr. mit 10 Rtlr. zu machenden Profits.

XL. Man kann auch vermittelst eines Aufsatzes der Regel de Tri, oder Kettenrechnung, Brüche auf einen verlangten Nenner bringen (Cap. 6. I. 11.). Denn da der Zähler ein bestimmtes Verhältniß zu dem Nenner hat, so kann man sagen: Wie z. B. in $\frac{2}{3}$ sich 3 : 2 verhält, so verhält sich 24 zu seinem Zähler, d. i.

3 : 2 = 24 : x, macht 16. daher ist 16 der Zähler, der sich zu 24 so, wie 2 zu 3 verhält. Folglich: wie viel sind $\frac{2}{2}\frac{0}{8}$ ℔? Saget:

28 : 20 = 32 ℔

20

28 : 640 | $22\frac{6}{7}$ ℔.

Probe der Kettenrechnung.

XLI. Aus dem, was wir von der Probe der Exempel der Regel de Tri und allen andern Proben beym Rechnen gesagt haben, ergiebt es sich schon, daß eine Probe eines Exempels von der Kettenrechnung keinesweges eine unumstößliche Gewißheit von der Richtigkeit eines solchen Exempels geben könne. Indessen gewährt eine solche Probe doch gleichfalls den doppelten Nutzen, erstlich, daß man, wenn sie etwas anders angiebt,

angiebt, dadurch theils veranlaßt wird, das Exempel von neuem durchzugehn und den Fehler aufzusuchen, theils, daß, wenn nun Probe und Exempel übereinstimmen, man dadurch einen ziemlichen Grad der Gewißheit erhält, daß das Exempel recht gerechnet sey, welcher Grad dadurch wächst, ja sehr hoch wird, wenn mehrere verschiedene Proben ein übereinstimmendes Resultat geben.

Es kann bey diesen Exempeln gleichfalls auf eine dreyfache Art gefehlt werden. Erstlich, in dem Ansatze; zweytens, in dem eigentlichen Calculo; drittens zugleich in beyden Stücken. Was den Calculus anbetrifft, so würde schon die Probe eine ziemliche Gewißheit verschaffen, wenn man, wie bey den Exempeln der Regel de Tri, die Angabe umkehrte, folglich das Gefundene zu einem wahren Satze machte, das Exempel nun berechnete, worauf einer der vorhin gegebenen Sätze erhalten werden müßte. Käme derselbe genau heraus, so gäbe das eine ziemliche Wahrscheinlichkeit, daß das Exempel richtig calculirt sey. Fehlte aber an der Zahl eines solchen Satzes das Mindeste, wäre es auch nur der kleinste Theil eines Bruchs, so wäre ein Fehler vorhanden, der indessen eben so gut in der Probe selbst, als in dem Exempel stecken könnte, daher beydes von Neuem sorgfältig angesehen und durchgerechnet werden müßte.

Man kann bey einem simpeln Exempel der Regel de Tri drey Veränderungen, oder Fragen anbringen, woraus, wenn stets die rechte Antwort erhalten wird, die Wahrscheinlichkeit, daß man recht gerechnet habe, einen so hohen Grad erhält, als hier möglich ist. Da nun in einem ordentlichen Exempel der Kettenrechnung mehr Glieder, als bey einem einfachen Exempel der Regel de Tri, und oft sehr viel Glieder vorhanden sind, so folgt, daß bey einem solchen Exempel sehr viele Veränderungen vorgenommen und Fragen angebracht

werden können, welche, wenn auch nur einige derselben versucht werden, die größte hier mögliche Gewißheit von der Richtigkeit der Rechnung verschaffen, sobald sie das gehörige Resultat geben.

1. Gesetzt, wir hätten das einfache Exempel: 2 ℔ kosten 40 Rthlr., was 4 Pfund? Das wäre:

– Rtlr.	=	4 ℔ 2.
2 ℔	=	40 Rtlr.
		80 Rtlr.

so können wir erstlich die Probe machen:

– Rtlr.	=	2 ℔
2 4 ℔	=	80 Rtlr.
2	:	80 = 40 Rtlr.

wo, das vorhin Gefundene, als 40 Rtlr., wiederum als ein gegebenes Glied angesehen, und folglich in den Satz gebracht ward. Hier kommen 40 Pfund heraus, welche vorhin gegeben waren. Dies beweiset schon einigermaßen die Richtigkeit des Calculi. Eine jede andere herausgekommene Zahl, als 40, hätte uns in Ungewißheit gelassen, ob das Exempel recht berechnet wäre.

Zweytens:

— ℔	=	40 Rtlr.
80 Rtlr.	=	4 ℔. 2.
		2 ℔

Wir sagten hier: wieviel Pfund geben 40 Rthlr., wenn 80 Rthlr. 4 Pfund geben? Wir nehmen die vorhin gefundenen 80 Rthlr. als ein wahres Glied an, und es durfte also keine andere Zahl als 2 Pfund herauskommen,

Drittens:

Drittens:

— ℔	=	8ø Rtlr.	2
4ø Rtlr.	=	2 ℔	
		4 ℔	

wo es hieß; wie viel Pfund geben 80 Rthlr., wenn 40 Rthlr. 2 Pfund geben? wo gleichfalls 80 Rthlr. als ein wahres Glied angenommen ward, und nichts anders, als 4 Pfund, herauskommen durfte.

2. Hieraus wird man noch deutlicher ersehen, was wir vorhin unter den Umkehrungen und veränderten Fragen, nebst den daraus sich ergebenden richtigen Antworten, oder Resultaten, verstanden haben. Bey eigentlichen Kettenrechnungen (XIV.) giebt es natürlicher Weise noch mehr solche Veränderungen. Wir wollen das Exempel (IX. 6.), einmahl von dieser Seite betrachten:

— Pfen.	=	1 Quent.	
4 Quent.	=	1 Lt.	
4. 32 Lt.	=	1 ℔	
11. xxø ℔	=	1 Zentn.	
xø Zentn.	=	8øø Rtlr.	8ø. 5.
1 Rtlr.	=	24 ggl.	3.
1 ggl.	=	x2 Pf.	3.
44	:	45	$1\frac{1}{44}$ Pf.

Wir können nun sagen: Wenn ein Quentchen kostet $1\frac{1}{44}$ Pfenn., was kosten 12 Zentner?

— Rtlr.

— Rlr. = xø Zentn. 5. 5.
1 Znt. = xxø ℔
1 ℔ = ℬℋ ℒ. 4.
1 ℒ. = ℋ Qu.

ℋ. ℋℋø. ℋℋ. 1 Qu. = $x\frac{x}{\mathcal{H}x}$ Pf. ℋℬ. 5.

ℬ { ℬ. xℋ Pf. = 1 ggl.
ℬ. ℋℋ ggl. = 1 Rtlr.

5 × 5 × 5 × 4 = 500 Rtlr.

Hier erhalten wir 500 Rtlr. wieder, also ist richtig calculirt gewesen.

(Um 44 los zu werden, so multiplicirten wir es mit 5, gab 220; dafür setzten wir oben eine 5 hin. Nun 110 in 220, 2 mahl XXX.)

Da in diesem Exempel außer dem Preise der 10 Zntn. und des 1 Quent. kein andrer Preis, sondern blos Verhältnisse des Gewichts und Geldes, in Ansehung ihrer Untersorten vorkommen, so können wir blos noch in Hinsicht auf diese letztern, Veränderungen vornehmen. Z. B. Wenn 10 Zentn. 500 Rtlr. kosten, und 1 Qu. kostet $1\frac{1}{44}$ Pf., wie viel Qu. hat ein Loth?

— Qu. = 1 ℒ.
ℋ. ℬℋ ℒ. = 1 ℔.
11. xxo ℔ = 1 Zent.

xo Zentn. = ℬøø Rtlr. ℬo. ℬ. } xℬ
1 Rtlr. = ℋℋ ggl. ℬ. }
1 ggl. = xℋ Pf. ℬ.

ℬ. ℋℬ. $x\frac{x}{\mathcal{H}\mathcal{H}}$ Pf. = 1 Qu. 44

11 : 44 | 4 Qu.

Wären

Wären die 4 Quent. nicht herausgekommen, so war es immer weniger gewiß, daß 1 Quent. $1\frac{1}{44}$ Pf. koste, oder jenes Exempel richtig gerechnet sey.

Man sieht, daß hier noch viele andere Fragen angebracht werden können. Z. B. wenn 10 Zentn. 500 Rtlr. und 1 Quent. $1\frac{1}{44}$ Pf. kosten, wieviel Pfund hat ein Zentner?

	— ℔	=	1 Zentn.			
	xø Zentn.	=	5øø Rtlr.	5ø.	10.	
	1 Rtlr.	=	24 ggl.	ß.	}	ß
	1 ggl.	=	x2 Pf.	ß.	}	
ß. 44.	$x\frac{x}{44}$ Pf.	=	1 Qu.	44.	11.	
	4 Qu.	=	1 Lt.			
4.	ß2 Lt.	=	1 ℔			

110 ℔.

Solche Versuche bestätigen immer mehr die Richtigkeit des Calculi, und geben zuletzt die größte Gewißheit davon.

3. Bey dem Exempel: Wieviel Hamburger Ellen sind 150 Nürnb. Ellen, wenn 7 Nürnb. 8 Breslauer; 6 Breslauer 5 Brabanter; 4 Brabanter 8 Hamburger sind? konnten gleichfalls eine Menge von Versetzungen, Veränderungen und Fragen vorgenommen werden, wo wir immer bey der Voraussetzung, daß das Gefundene das wahre sey, dasselbe in den Ansatz bringen und so gewisser seyn konnten, ob wir recht calculirt hätten, sobald ein anderes von den gegebenen Gliedern gefunden ward.

Das Gefundene daselbst war $285\frac{5}{7}$ Hamb. Ellen. Saget nun: Wenn 7 Nürnb. Ellen sind 8 Breslauer; 6 Breslauer 5 Brabanter; 4 Brabanter 8 Hamburger, wieviel sind $285\frac{5}{7}$ Hamburger nun Nürnberger Ellen? Es müssen 150 Nürnb. Ellen herauskommen, wenn im Calculo nicht gefehlt ist.

1. – Nürnb. Ell.	=	1285/7 H. Ell.	1000.	50
40 { 8 Hamb.	=	4 Brab.		3
40 { 8 Brab.	=	6 Bresl.		
1. 8 Bresl.	=	7 Nürnb.		

150 N. Ell.

Dies war gleichsam die natürlichste Frage: denn es war die erste Umkehrung. Wir können nun sehr viele andre Fragen thun. Z. B. Wenn 150 Nürnb. sind 285/7 Hamb.; und 7 Nürb. sind 8 Breslauer; 6 Bresl. 5 Brabanter, wieviel Hamb. Ellen sind 4 Brabanter?

– Hamb.	=	4 Brabant.		
40 { 8 Brab.	=	6 Bresl.		2
40 { 8 Bresl.	=	7 Nürnb.		
B. 1. x80 Nürnb.	=	1285/7 Hamb.	1000.	80

8 H. Ellen.

Diese Zahl mußte herauskommen, wenn die Voraussetzung der gefundenen 285/7 Hamb. Ellen richtig war.

XLII. Wir erhalten indessen durch solche Proben blos eine Gewißheit in Ansehung des eigentlichen Calculi. Es können dieselben ein Exempel als richtig bestätigen, da doch in dem Ansatze gefehlt, und folglich das Exempel falsch ist.

Wenn 100 Pfund Waare 60 Mark kosten, auf 100 Mark noch 5 Mark Rabatt gegeben werden: was kosten 315 Pfund solcher Waare?

— Mark	=	8 x 8 ℔	3.
x00 ℔	=	60 Mark	
x05 Mark	=	x00 Mark	

180 Mark

Setzet

Setzet nun dieses Exempel falsch an:

8	— Mark	=	3x8 ℔	63
2 x ø	x ø ø ℔	=	ø ø Mark	ø. 3.
	100 Mark	=	105 Mark	

100.....	105 ✕ 63
	315
	630
	6615 ✕ 3
	..19845 | 198 $\frac{45}{100}$.

Und die Probe; Saget: wenn 315 Pfund kosten 198 $\frac{2}{10}$ Mark, was kosten 100 Pfund, wenn auf 100 Pfund 5 Mark Rabatt gelassen werden?

— M. = x ø ø ℔ 8.

21. ø 3. 2 ø. 3x8 ℔ = x ø 8 $\frac{ø}{2ø}$ M. 3 ø ø ø. 1323.

21. x ø 8 M. = x ø ø M. 20. 20

21 ✕ 21 = 441 : 26460 \| 60. M.

Ob nun gleich die Probe die Richtigkeit des Exempels anzugeben scheint, so ist es doch falsch, indem zwar recht calculirt, aber der Ansatz das erstemahl falsch gemacht, und dadurch, daß man in der Probe, die 105 Mark Rabatt in die linke Columne zu bringen, durch die 315 Pfund, worunter sie vorher standen, sich verführen ließ, jener falsche Ansatz, vermittelst der herausgebrachten 60 Mark, für richtig erklärt worden.

1. Es scheint daher bey Berechnung dieser Exempel, das der beste Rath zu seyn, daß man vor allen Dingen den Ansatz mit Bedachtsamkeit und genau nach der bisher ertheilten Anweisung verfertige. Dann nehme man den eigentlichen Calculus mit derjenigen Aufmerksamkeit und Sorgfalt vor, als es überhaupt bey allem Rechnen nöthig ist. Will man die Richtigkeit desselben erproben,

so kann das vermittelst der Umkehrungen geschehen, von denen wir vorhin Beyspiele gegeben haben. Ist der Fall, den man berechnet, wichtig, so verlohnt es sich wohl der Mühe, ein noch mehreres zu thun. Wir haben vorhin bey Erläuterung des Exempels XXXVIII. 4. bereits gesehen, wie man eine solche Rechnung auf verschiedene Art prüfen kann. Das Gesuchte fand sich daselbst mit $468\frac{8}{20}\frac{7}{0}\frac{5}{8}\frac{9}{6}\frac{5}{40}$ Rtlr. Ld'or. Durch die in dreyen Kettensätzen vorgenommene Auflösung des in Eins gebracht gewesenen Satzes ergab sich gerade dasselbe, und als die Frage hernach vermittelst der Regel de Tri beantwortet ward, fand sich genau eben dasselbe. Bey solchen Untersuchungen erhält die Gewißheit, im Rechnen nicht gefehlt zu haben, ihren höchsten Grad.

2. Es ist dabey nur etwas verdrüßlich, daß, wenn zwischen dem Resultate der Berechnung und den Proben sich nun wirklich Unterschiede finden, man immer noch in Ungewißheit bleibt, wo der Fehler stecke: ob in dem Exempel, oder in der Probe, oder in beyden? Und wie leicht kann das geschehen bey solchen Exempeln, als jenes war, und vorzüglich da, wo (wie gemeiniglich bey Brüchen geschieht) mehrere große Primzahlen sich einfinden? Es muß dann die Durchrechnung von neuem mit größter Strenge und Aufmerksamkeit vorgenommen werden, sowohl in Hinsicht auf den Ansatz, als den Calculus, in dem Exempel sowohl, als in der Probe, und man darf nicht eher ruhen, bis man den Fehler gefunden hat, und Exempel und Probe, bis auf dem kleinsten Bruch nach, auf das genauste zusammen treffen.

3. Ein Geübter ist, wenn eine Probe mit der Berechnung nicht übereinstimmt, zuweilen im Stande, den Fehler zu finden, ohne das ganze Exempel deswegen durchzurechnen. Ist der Unterschied sehr groß, so ist ein großer Fehler begangen, der sich noch eher entdecken läßt, als ein geringer. Fehlt es etwa blos bey einigen Zahlen des mit dem Gesuchten erhaltenen Bruchs, so liegt der

Fehler

Fehler dem Schlusse der Berechnung näher. Z. B. in dem Exempel (XXXVIII. 4.) fände sich bey der Berechnung in einem einzigen Satze das Gesuchte mit $468\frac{8}{2}\frac{7}{0}\frac{5}{8}\frac{9}{6}\frac{7}{4}\frac{}{0}$ Rtlr. Ld'or; dagegen erhielte man bey der Probe desselben nach der andern Art (daselbst 5.) das Gesuchte mit $468\frac{6}{1}\frac{6}{5}\frac{0}{6}\frac{4}{4}\frac{2}{8}\frac{7}{0}\frac{5}{0}\frac{}{0}$ Rtlr. Ld'or, so würde der Fehler im Ansatze keinesweges zu suchen seyn, auch nicht in einer ganzen Zahl stecken, sondern, wegen des kleinen Unterschiedes, sich in einem Bruche befinden und wenn man dahero vorzüglich auf dieselben in dem Exempel seine Aufmerksamkeit richtete, würde man finden, daß bey Nr. 4. daselbst, statt $1062\frac{1}{4}\frac{1}{0}\frac{7}{0}\frac{9}{0}$ Mark Hamb. Cour. aus Versehen $1062\frac{1}{4}\frac{1}{0}\frac{0}{0}\frac{9}{0}$ Mark Hamb. Cour. geschrieben worden sey, woraus der ganze Fehler und die Differenz in der Probe selbst entstand, welche baldige Auffindung daher die weitere Revision des ganzen Exempels unnöthig machte.

Kurze Erklärung und Uebersicht der blos in diesem Theile vorkommenden Namen vom Gelde, Maaße ꝛc. zum Verständniß der hier vorkommenden Exempel.

Geld.

1 Rthlr. enthält im Brandenburgischen und Sächsischen 24 Groschen.

1 Groschen enthält 12 Pfennige.

5 Rthlr. in Golde sind gleich 1 Louisd'or, Friedrichsd'or, Carlsd'or ꝛc.

1 Mark ist $\frac{1}{3}$ eines Rthlr. in Hamburg ꝛc. Courant ist vom Banco daselbst darinnen unterschieden, daß 100 Mark Banco gleich sind ohngefähr 124 bis 125 Mark Courant. 1 Mark enthält 16 Schilling.

Gewicht.

Gewicht.

1 Zentner ist zu 110 Pfund angenommen; das Pfund zu 32 Loth, das Loth zu 4 Quentchen.

In verschiedenen Ländern ist 1 Pfund nicht gleich schwer. In Frankreich war vordem 1 Pfund gleich $1\frac{5}{100}$ Pfund in Leipzig. Daher in dem Exempel Cap. 11. XXXIX. 2. 105 Leipziger Pfund 100 Pfund in Frankreich gleich gesetzt werden konnten.

Maaß von trocknen Dingen.

1 Wispel enthält im Brandenburgischen 24 Scheffel.
1 Scheffel 2 Himpten; 1 Himpte 4 Vierfaß.
1 Vierfaß 2 Metzen.

Gemäß von flüßigen Sachen.

Wein.

1 Orthof hat 3 Eimer.
1 Eimer 6 Anker.
1 Anker im Brandenburgischen 32 (in Sachsen 40) Maaß.

Das Zählen beym Papier.

1 Ballen Papier enthält 10 Rieß.
1 Rieß 20 Buch.
1 Buch 24 Bogen, bey dem Druckpapier 25 Bogen.

Bemerkte Druckfehler.

Seite	41	Zeile	13	lese man	139 statt 39
		daselbst	—	—	191 — 91
—	44	Zeile	4	— —	14:4 — 14:3
		daselbst	—	—	Quotienten 3 statt Quot. 4
—	—	Zeile	5	— —	$3\frac{2}{4}$ statt $4\frac{2}{4}$.
—	196	—	10	ist der Factor 4, statt 2, und darnach das Uebrige zu reguliren.	

Bayerische Staatsbibliothek München

XX (1+2) I.88

III.93

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Boysen, Friedrich August

Die selbstlehrende Rechenkunst oder vollständige Anweisung für alle Stände ... zu einem gründlichen und leichten Selbstunterrichte

Bd.: 1. 1796. - X, 286 S.

Leipzig 1796

Math.u. 308 a-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10594462-9
VD18 80020127-001